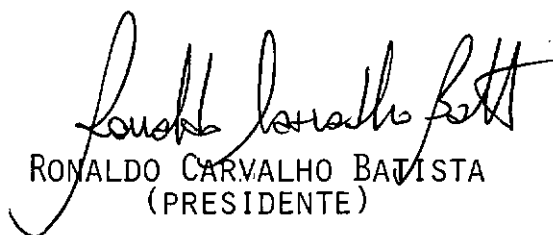


INTERAÇÃO LOCAL-GLOBAL NA FLAMBAGEM DE
COLUNAS DE SEÇÃO U ENRIJECIDA

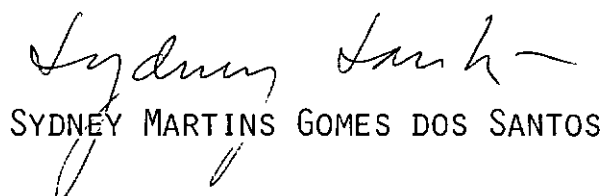
MICHÈLE SCHUBERT PFEIL

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE
PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE
JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO
DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.) EM ENGENHARIA CIVIL

APROVADA POR:



RONALDO CARVALHO BATISTA
(PRESIDENTE)



SYDNEY MARTINS GOMES DOS SANTOS



RAUL ROSAS E SILVA

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

ABRIL DE 1985

PFEIL, MICHÈLE SCHUBERT

Interação Local e Global na Flambagem de Colunas de Seção U Enrijecida (Rio de Janeiro) 1985.

XIII, 162 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, M.Sc., Engenharia Civil, 1985)

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE.

1. Estabilidade de perfis metálicos I. COPPE/UFRJ. II. Título (série)

Resumo da Tese Apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

INTERAÇÃO LOCAL-GLOBAL NA FLAMBAGEM DE
COLUNAS DE SEÇÃO U ENRIJECIDA

Michèle Schubert Pfeil

Abril de 1985

Orientador: Prof. Ronaldo Carvalho Batista

Programa: Engenharia Civil

Apresenta-se uma análise teórica do comportamento de colunas de seção U enrijecida sob carga centrada e excêntrica. Utiliza-se um método semi-energético para investigar a interação não-linear entre os modos local e global de flexão.

Os resultados desta análise mostram os caminhos de equilíbrio pós-crítico local, estáveis e instáveis, para várias colunas, bem como a evolução da distribuição de tensões a que estão submetidas durante o processo pós-crítico.

As cargas últimas teóricas são comparadas a alguns resultados experimentais. Além disso, é feita uma avaliação de importantes normas de projeto frente aos resultados teóricos obtidos.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

INTERACTION BETWEEN LOCAL AND GLOBAL FLEXURAL
BUCKLING MODES OF LIPPED CHANNEL COLUMNS

Michèle Schubert Pfeil

April, 1985

Chairman: Prof. Ronaldo Carvalho Batista

Department: Civil Engineering

A theoretical analysis of the behaviour of thin-walled lipped channel columns under concentric and eccentric loading is presented. A semi-energy method is used to investigate the non-linear interaction between the local and global flexural buckling modes.

The results of this analysis show the stable and unstable local post-critical equilibrium paths, for various columns, plus the growth of membrane stress distribution during the post-critical process.

The theoretical ultimate load is compared with some experimental results. Besides, some important design prescriptions are examined on the light of the obtained theoretical results.

Para Walter e Mariette.

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Ronaldo Carvalho Batista pela valiosa orientação, assim como pela amizade e incentivo em alguns momentos difíceis.

A todos os professores do Programa de Engenharia Civil da COPPE pelos conhecimentos transmitidos durante os cursos.

A meus pais e irmãos pelo incentivo, apoio e dedicação.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) que financiou meus estudos de pós-graduação.

A Eneida, Gilmar e Pedro pela esmerada elaboração gráfica deste trabalho.

ÍNDICE

I - INTRODUÇÃO	1
I.1. Apresentação do Problema e sua Importância	1
I.2. Histórico dos Estudos	3
I.3. Objetivo e Escopo de Trabalho	5
II - TEORIA DA ESTABILIDADE ELÁSTICA APLICADA A PLACAS COMPRIMIDAS	8
II.1. Introdução	8
II.2. O Critério de Energia para Estabilidade do Equilíbrio	9
II.2.1. O equilíbrio de um corpo elástico	9
II.2.2. A estabilidade do equilíbrio	10
II.2.3. Tipos básicos de comportamento	12
II.3. O Funcional de Energia Potencial Total para uma Placa Comprimida	16
II.3.1. Hipóteses simplificadoras	16
II.3.2. Energia potencial total	19
II.3.3. A variação da energia potencial total	22
II.4. As Equações Diferenciais Não-Lineares de Equilíbrio	28
III - CAMPOS DE DESLOCAMENTO E TENSÃO PARA SEÇÕES COMPOSTAS DE PLACAS ESBELTAS	32

III.1.	Introdução	32
III.2.	Condições de Contorno e Funções Deslocamento	36
III.3.	Atendimento das Condições de Contorno	39
III.4.	Funções de Tensão de Airy	43
IV -	ANÁLISE LINEAR - CÁLCULO DA CARGA CRÍTICA	64
IV.1.	O Cálculo da Carga Crítica	64
IV.2.	Apresentação e Análise dos Resultados	71
IV.3.	Comparação dos Resultados	81
V -	ANÁLISE NÃO-LINEAR DO COMPORTAMENTO PÓS-CRÍTICO	84
V.1.	Introdução	84
V.2.	Extremização da Variação da Energia Potencial Total: Equilíbrio Local	85
V.3.	Equilíbrio Global da Coluna	88
V.4.	Apresentação e Análise dos Resultados	95
V.4.1.	Coluna sob carga centrada	96
V.4.2.	Coluna sob carga excêntrica	107
V.5.	Comparação dos Resultados	112
VI -	COMPARAÇÃO COM NORMAS DE PROJETO	116
VI.1.	Introdução	116
VI.2.	AISI	117
VI.3.	Australian Code AS1538	123
VI.4.	Canadian Code CSA-S136	124
VI.5.	Exemplos e Comparações	126
VII -	COMENTÁRIOS FINAIS	135

APÊNDICE A	138
APÊNDICE B	144
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	158

SIMBOLOGIA

Os principais símbolos utilizados neste trabalho são:

A_n - coeficiente nas funções deslocamento

a_1, a_2, a_3 e a_4 - coeficientes cujas expressões se encontram no Apêndice B

a_n, b_n, m_n, t_n - inteiros utilizados como expoentes nas funções deslocamento

b - largura do flange

b_f - semi-largura do flange

b_w - largura da alma

b_l - largura do enrijecedor

C_j, D_j, E_j, K_l - coeficientes na função de tensões de Airy

D - constante de rigidez a flexão da placa $D = \frac{E t^3}{12 (1 - \nu^2)}$

d - posição do centroide a partir do enrijecedor

d^* - posição efetiva do centroide, contada a partir do enrijecedor, após a flambagem local.

E - módulo de elasticidade de Young

- e - excentricidade de carga
 \bar{e} - excentricidade adimensional $\bar{e} = \frac{e}{(b_w - d)}$
 F - função de tensão de Airy
 F_a - tensão admissível
 F_y - tensão de escoamento do aço
 G - constante $G = 2 \pi / S$
 $H_{i,j}, I_{i,j}, J_{i,j}, N_{i,j}, P_{i,j}$ - constantes cujas expressões são encontradas no Apêndice A
 I - momento de inércia da seção
 I^* - momento de inércia reduzido
 K - constante de rigidez de membrana $K = E t / 2 (1 - \nu^2)$
 k - coeficiente de flambagem $k = \sigma_{12} (1 - \nu^2) / \pi^2 E (b/t)^2$
 L - comprimento da coluna
 M - momento em torno de um eixo passando pelo enrijecedor
 M^* - momento interno adicional devido à flambagem local
 M_x, M_y, M_{xy} - momentos fletores e torção - eq. (II.17)
 M'_x, m'_y, m'_{xy} - componentes lineares dos momentos
 N_x, N_y, N_{xy} - esforços internos de membrana na eq. (II.16)
 N_x^F - esforço axial fundamental
 N_x^* - resultante de tensão média no bordo do flange
 n'_x, n'_y, n'_{xy} - componentes lineares dos esforços internos de membrana

n_x'' , n_y'' , n_{xy}'' - componentes quadráticas dos esforços internos de membrana

P - carga aplicada

\bar{P} - carga aplicada adimensional $\bar{P} = \frac{P b}{\pi^2 D}$

P_a - carga admissível

P_E - carga crítica de Euler

P_E^* - carga crítica de Euler reduzida

P_L - carga crítica local

\bar{P}_{ult} - carga última teórica adimensional $\bar{P}_{ult} = \frac{P_{ult} b}{\pi^2 D}$

Q - fator de forma que leva em conta os efeitos da flambagem local

r - raio de giração da seção

S - comprimento de meia-onda

t - espessura da placa

U - energia de deformação elástica interna

U_f - energia de flexão

U_m - energia de membrana

u - componente axial de deslocamento

u^* - encurtamento do flange nos nós da meia-onda central

\underline{u} - campo de deslocamentos

\underline{u}^F - campo fundamental de deslocamento

\underline{u}^I - campo incremental de deslocamento

V - energia potencial total

V_0, V_1, V_2, V_3, V_4 - componentes fundamental (constante), linear, quadrática, cúbica e quártica da energia potencial total

ΔV - variação da energia potencial total $\Delta V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4$

v - componente transversal de deslocamento no plano da placa

x - coordenada axial

Y_i - função deslocamento para a placa i

Y_{cr} - modo crítico local

y - coordenada transversal no plano da placa

W - magnitude das deflexões

w - componente transversal de deslocamento fora do plano da placa

w_i - deflexão local da placa i

z - coordenada transversal fora do plano da placa

α - parâmetro de excentricidade dos encurtamentos

$\beta_n, \gamma_n, \mu_n, \xi_n, \rho_n, \zeta_n, \Omega_n$ - coeficientes nas funções deslocamento

δ - símbolo de variação

δ_c - deflexão central da coluna

$\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$ - componentes de deformação da superfície média

$\epsilon_x^I, \epsilon_y^I, \gamma_{xy}^I$ - componentes incrementais de deformação da superfície média

ϵ_x^F - componente fundamental da deformação axial da superfície média

$\epsilon_x', \epsilon_y', \gamma_{xy}'$ - componentes lineares da deformação da superfície média

$\epsilon_x'', \epsilon_y'', \gamma_{xy}''$ - componentes quadráticas da deformação da superfície média

λ - parâmetro de carga

λ_{cr} - menor autovalor - parâmetro crítico de carga

ν - coeficiente de Poisson

$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ - componentes de tensão internas

σ_{cr} - tensão crítica local

$\chi_x, \chi_y, \chi_{xy}$ - componentes de mudança de curvatura

$\chi_x', \chi_y', \chi_{xy}'$ - componentes lineares da mudança de curvatura

Ω - potencial de carga externa

∇^4 - operador biarmônico $\nabla^4 = \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{2}{\partial x^2} \frac{\partial^4}{\partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right)$

Obs.: Os subíndices precedidos de vírgula indicam derivadas parciais com respeito a estes índices (p. ex.; $w_{,xx} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$)

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

I.1. APRESENTAÇÃO DO PROBLEMA E SUA IMPORTÂNCIA

O desejo, por parte dos engenheiros estruturais, de utilizar os materiais disponíveis da maneira mais eficiente possível tem levado a concepções cada vez mais esbeltas. Os perfis formados por dobramento a frio de chapas metálicas, também chamados de perfis leves, constituem um passo a mais nesta direção.

Estes perfis apresentam algumas vantagens sobre os perfis laminados tradicionais, tais como: a economia para cargas leves e vãos pequenos; a versatilidade de sua utilização e a grande variedade de formas de seções transversais que podem ser fabricadas com equipamento simples em comparação com as instalações necessárias à produção de perfis laminados.

A utilização de perfis leves complementa a de perfis laminados e é também apropriada aos casos em que o elemento estrutural tem por finalidade compor superfícies assim como em estruturas industriais para armazenamento de produtos diversos.

Fora do âmbito da engenharia civil, estes perfis têm especial importância nas indústrias de automóveis e aeronaves onde a redução do peso estrutural é um problema crítico.

A dobragem a frio das chapas afeta as propriedades mecânicas do aço especialmente nas "dobras", elevando a tensão de escoamento e reduzindo a ductilidade, enquanto que os perfis laminados e também os compostos por soldagem ficam submetidos a tensões residuais decorrentes do processo de fabricação. Por outro lado, a dobragem a frio não oferece limites práticos às relações largura por espessura das seções como ocorre na laminação a quente.

A filosofia de projeto dos perfis leves é basicamente a mesma dos perfis tradicionais, porém existem importantes considerações adicionais originadas essencialmente da variedade de formas de seções, dos efeitos de dobragem a frio e do comportamento estrutural de chapas finas.

Devido à esbeltez da seção transversal (elevada relação largura por espessura), estes perfis estão sujeitos à flambagem local. Como se sabe, este fenômeno não representa um colapso estrutural da peça mas uma redução brusca de sua rigidez axial e de flexão. Esta resistência pós-flambagem local foi detectada teoricamente por Von Karman em 1932. A flambagem local de uma placa comprimida provoca uma redistribuição de tensões cuja não-linearidade se acentua com o acréscimo de carga.

Uma coluna longa formada por chapas esbeltas está sujeita à flambagem no modo local e nos modos globais de flexão e torção. Quando, para determinadas geometrias, as cargas críticas associadas a estes três modos são próximas, há uma interação

não-linear entre dois deles ou mesmo entre os três, o que conduz a uma redução na capacidade da coluna.

O presente trabalho trata da interação entre os modos local e global de flexão, ocorrendo em regime elástico. Embora o comportamento pós-crítico associado a estes dois modos tomados isoladamente seja estável, a interação não-linear dos mesmos pode conduzir a um tipo de colapso súbito, indicando um comportamento de equilíbrio pós-crítico instável, assim como se observa em cascas esbeltas. A ocorrência deste tipo de colapso depende da relação entre as cargas críticas local e global, além da magnitude e forma das imperfeições geométricas.

A importância deste estudo reside no fato de que o colapso destas colunas se dá com carga reduzida devido à interação não-linear entre os modos local e global. Além disso, não se alcançou, ainda hoje, um estágio final de conhecimento sobre o mecanismo não-linear de flambagem frente aos diversos fatores que o influenciam.

1.2. HISTÓRICO DOS ESTUDOS

Até o início dos anos 60, o dimensionamento de peças comprimidas de paredes finas era baseado no critério de BLEICH [1], que consistia em evitar que a flambagem local ocorresse antes da flambagem por flexão. O limite inferior deste critério conduz a uma geometria ótima para a qual

$$\sigma_{cr}^{local} = \sigma_{cr}^{global} \quad (1.1)$$

sem considerar o efeito de imperfeições iniciais.

Este conceito não está de acordo com o comportamento real destas estruturas. Em 1960, Koiter alertou para a possibilidade de ocorrência de um colapso por flambagem brusco, e portanto perigoso, em função desta otimização estrutural. Alguns anos mais tarde esta suspeita foi confirmada teoricamente por VAN DER NEUT [2] através do estudo analítico da interação entre modos em seções idealizadas.

Entre 1967 e 1970 ocorreram alguns acidentes provocados por flambagem em pontes metálicas de seção caixão enrijecidas que puseram em questão os métodos analíticos utilizados no cálculo destas pontes. As várias comissões de inquérito [3] relacionadas a estes acidentes sugeriram a necessidade de maior pesquisa sobre os fenômenos de instabilidade nestas estruturas.

A partir de então, numerosos pesquisadores têm investigado uma variada gama de problemas de interação modal.

GRAVES-SMITH [4] pesquisou o comportamento pós-crítico local de colunas de seção fechada e examinou sua capacidade de carga através de uma análise elasto-plástica.

O estudo de painéis enrijecidos, componentes de seções caixão, sujeitos a flambagem local e por flexão foi feito por WALKER [5]. Neste estudo, levou em conta o efeito de imperfeições geométricas na redução de carga crítica, para certas geometrias, sensíveis a estas imperfeições.

O comportamento pós-crítico de colunas de seção I foi investigado por DEWOLF, PEKOZ e WINTER [6] através de análise experimental e por HANCOCK [7] com o método das faixas finitas.

RHODES e HARVEY [8] examinaram a interação entre os modos local e global de colunas de seção U utilizando um método semi-energético, assim como o fizeram LOUGHLAN E RHODES [9] para o caso de seções U enrijecidas.

Atualmente, os pesquisadores belgas MAQUOI e RONDAL [11] investigam a influência dos efeitos da dobragem a frio das chapas, aliada à de imperfeições geométricas, na capacidade de colunas longas formadas por seções esbeltas.

1.3. OBJETIVO E ESCOPO DESTA TRABALHO

O presente trabalho trata de colunas perfeitas de seção U enrijecida carregadas excentricamente e tem por objetivo investigar o comportamento pós-crítico levando em conta a interação não-linear entre os modos local e global, no regime elástico. As imperfeições no modo global são consideradas indiretamente por equivalência à excentricidade de carga.

A escolha da seção U enrijecida se deve ao fato de ser esta a seção mais eficiente para uso em colunas, como mostra a Figura (I.1) [13], obtida teoricamente a partir de determinadas condições de contorno nos bordos das placas.

O Método dos Elementos Finitos constitui o método mais poderoso para análise da interação entre os modos local e global, já que se aplica a qualquer forma de seção. Entretanto, necessita de discretização espacial de cada estrutura a ser estudada e a análise não-linear envolve por vezes um sistema muito grande de equações.

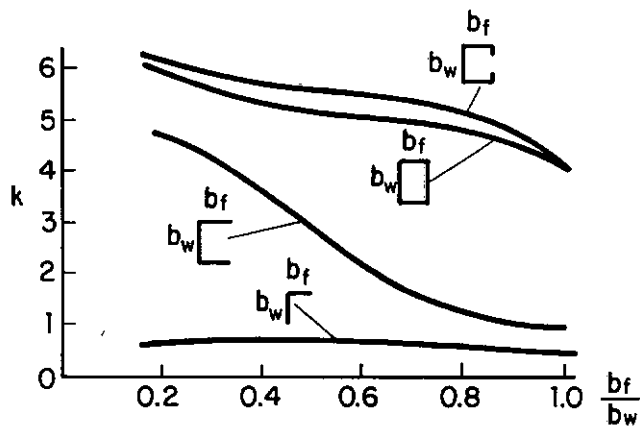


Figura I.1 - COEFICIENTE DE FLAMBAGEM k PARA AS SEÇÕES MAIS UTILIZADAS [13].

Como o objetivo deste trabalho é o estudo de uma seção em particular (a mais eficiente), optou-se por um método semi-energético que, embora aplicado a uma só seção, é mais econômico por não requerer discretização e por serem os parâmetros de entrada em número bastante reduzido.

O método consiste na aplicação do método de energia a nível local e de equilíbrio a nível global sendo mais adequado ao presente caso. Além disso, por ser bastante refinado dentro das limitações de geometria de seção, propicia entendimento e acompanhamento claro do mecanismo não-linear de flambagem.

No Capítulo II e III encontram-se os critérios, hipóteses e funções aqui adotados. No Capítulo IV apresenta-se a análise linearizada para o cálculo da carga e modo críticos e no Capítulo V o procedimento utilizado na análise não-linear seguido dos resultados obtidos e comparações destes com outros de origem teórica e experimental.

Mostra-se sob que condições o comportamento pós-crítico

destas colunas pode ser instável e como se desenvolvem as tensões e a deformada da seção durante o processo não-linear. Apresenta-se também a variação da carga última teórica com a esbeltez da coluna e o efeito da excentricidade de carga na resposta não-linear da mesma.

Finalmente, no Capítulo VI estuda-se o dimensionamento de colunas de seção U enrijecida segundo algumas normas de projeto e avalia-se as prescrições destas normas frente aos resultados teóricos.

CAPÍTULO II

TEORIA DA ESTABILIDADE ELÁSTICA APLICADA A PLACAS COMPRIMIDAS

II.1. INTRODUÇÃO

O estudo dos fenômenos de instabilidade pode ser feito por três métodos de análise: método energético, método de equilíbrio e método dinâmico.

No método energético a estabilidade do equilíbrio depende das características da energia potencial total do sistema estrutural na configuração deformada examinada. Por este método, utilizado no presente trabalho, chega-se às equações de equilíbrio, as quais são resolvidas de forma aproximada. Com esta solução aproximada obtêm-se o caminho de equilíbrio e avalia-se a estabilidade do mesmo.

II.2. O CRITÉRIO DE ENERGIA PARA ESTABILIDADE DO EQUILÍBRIO

II.2.1. O ESTADO DE EQUILÍBRIO

Seja uma estrutura submetida a um carregamento quase-estático conservativo associado a um único parâmetro de carga, λ , numa configuração deformada caracterizada pelo campo de deslocamentos \underline{u} cinematicamente admissível isto é, que satisfaz as condições de contorno e continuidade do sistema estrutural. Esta configuração será de equilíbrio se e somente se a energia potencial total do sistema, $V(\underline{u}, \lambda)$, for estacionária em relação ao campo de deslocamentos \underline{u} . Esta condição de estacionariedade da energia é traduzida pela equação variacional

$$\delta V(\underline{u}, \lambda) = 0 \quad (\text{II.1})$$

para todas as variações admissíveis $\delta \underline{u}$ do campo de deslocamentos \underline{u} .

A equação variacional (II.1) é válida para sistemas elásticos conservativos isto é, aqueles que possuem uma energia de deformação interna associada a cada configuração deformada e para os quais as forças externas derivam de um potencial, de tal maneira que a energia potencial total possa ser escrita como

$$V = U + \Omega \quad (\text{II.2})$$

onde

U = energia de deformação elástica

Ω = energia potencial das cargas externas

Uma estrutura numa configuração deformada sob ação de carregamento pode estar em equilíbrio estável ou instável; a condição para a estabilidade do equilíbrio é analisada a seguir.

II.2.2. A ESTABILIDADE DO EQUILÍBRIO

Considera-se a condição (II.1) aplicada a um estado fundamental de equilíbrio, F , descrito por um campo de deslocamentos \underline{u}^F . Para que esta configuração de equilíbrio seja estável é necessário e suficiente que a variação da energia potencial total, ΔV , correspondente a um campo de deslocamentos incremental \underline{u}^I , suficientemente pequeno e cinematicamente admissível, seja positiva, isto é, que no ponto de equilíbrio a energia potencial seja um mínimo relativo e completo. Esta condição pode ser traduzida pela inequação

$$V(\underline{u}^F + \underline{u}^I) > V(\underline{u}^F) \quad (\text{II.3a})$$

ou ainda por

$$\Delta V = V(\underline{u}^F + \underline{u}^I) - V(\underline{u}^F) > 0 \quad (\text{II.3b})$$

Pode-se expandir o membro esquerdo da inequação (II.3a) desde que V seja uma função analítica na vizinhança de \underline{u}^F e que este campo de deslocamentos fundamental varie suavemente com o aumento de carga λ a partir de zero. Assim obtém-se:

$$\begin{aligned}
 V(\underline{u}^F + \underline{u}^I, \lambda) &= V(\underline{u}^F, \lambda) + \delta V(\underline{u}^I, \underline{u}^F, \lambda) + \frac{1}{2} \delta^2 V(\underline{u}^I, \underline{u}^F, \lambda) + \dots = \\
 &= V_0 + V_1 + V_2 + \dots
 \end{aligned}
 \tag{II.4}$$

onde V_0 , V_1 , V_2 etc comportam termos constantes, lineares, quadráticos etc, em \underline{u}^I e suas derivadas.

Como a configuração fundamental \bar{e} de equilíbrio

$$V_1 = \delta V(\underline{u}^F, \underline{u}^I, \lambda) = 0 \tag{II.5}$$

A condição de estabilidade requer que

$$V_2 = \frac{1}{2} \delta^2 V(\underline{u}^F, \underline{u}^I, \lambda) > 0 \tag{II.6}$$

uma vez que, sendo \underline{u}^I pequeno $|V_2| > |V_3| > |V_4| \dots$

Hã ocorrência de instabilidade quando V_2 \bar{e} negativo. O caso crítico ocorre para

$$\delta^2 V(\underline{u}^F, \underline{u}^I, \lambda) \equiv 0 \tag{II.7}$$

para algum campo de deslocamentos incremental \underline{u}^I . Quando a carga aumenta a partir de zero, alcança-se um valor de λ , chamado λ_{crit} , para o qual a forma quadrática $\frac{1}{2} \delta^2 V$ deixa de ser positiva para algum campo de deslocamentos \underline{u}^I . Portanto para $\lambda = \lambda_{crit}$, V_2 \bar{e} estacionário em relação a este \underline{u}^I em particular. Então a equação

$$\delta(V_2) = \delta\left(\frac{1}{2} \delta^2 V\right) = 0 \tag{II.8}$$

traduz a condição de estacionariedade do ponto crítico, e constitui o critério atribuído a Trefftz para o cálculo de cargas críticas.

A condição (II.8), por envolver a primeira variação com respeito a \underline{u}^I da forma quadrática, V_2 , do incremento total da energia potencial, fornece um problema linearizado de autovvalor. A carga crítica λ_{crit} será o menor dos autovalores podendo estar associada a um ou mais modos críticos \underline{u}_{crit}^I . Entretanto o problema linearizado não fornece informação acerca da estabilidade do estado crítico de equilíbrio. Para este estudo é necessário averiguar-se o sinal das variações de mais alta ordem V_3 e V_4 .

O estudo do comportamento estrutural e da estabilidade das configurações pós-críticas será feito mediante resolução da equação não-linear de equilíbrio:

$$\delta [\Delta V] = \delta \left[\frac{1}{2!} \delta^2 V (\underline{u}^F, \underline{u}^I, \lambda) + \frac{1}{3!} \delta^3 V (\underline{u}^F, \underline{u}^I, \lambda) + \right. \\ \left. + \frac{1}{4!} \delta^4 V (\underline{u}^F, \underline{u}^I, \lambda) \right] = 0 \quad (II.9)$$

II.2.3. TIPOS BÁSICOS DE COMPORTAMENTO

Apresenta-se na Figura (II.1) os três tipos básicos de comportamento que se encontram no estudo da estabilidade estrutural de sistemas geometricamente perfeitos. Os caminhos pós-críticos obtidos da equação não-linear (II.9) interceptam o caminho fundamental de equilíbrio no ponto crítico ou ponto de bi

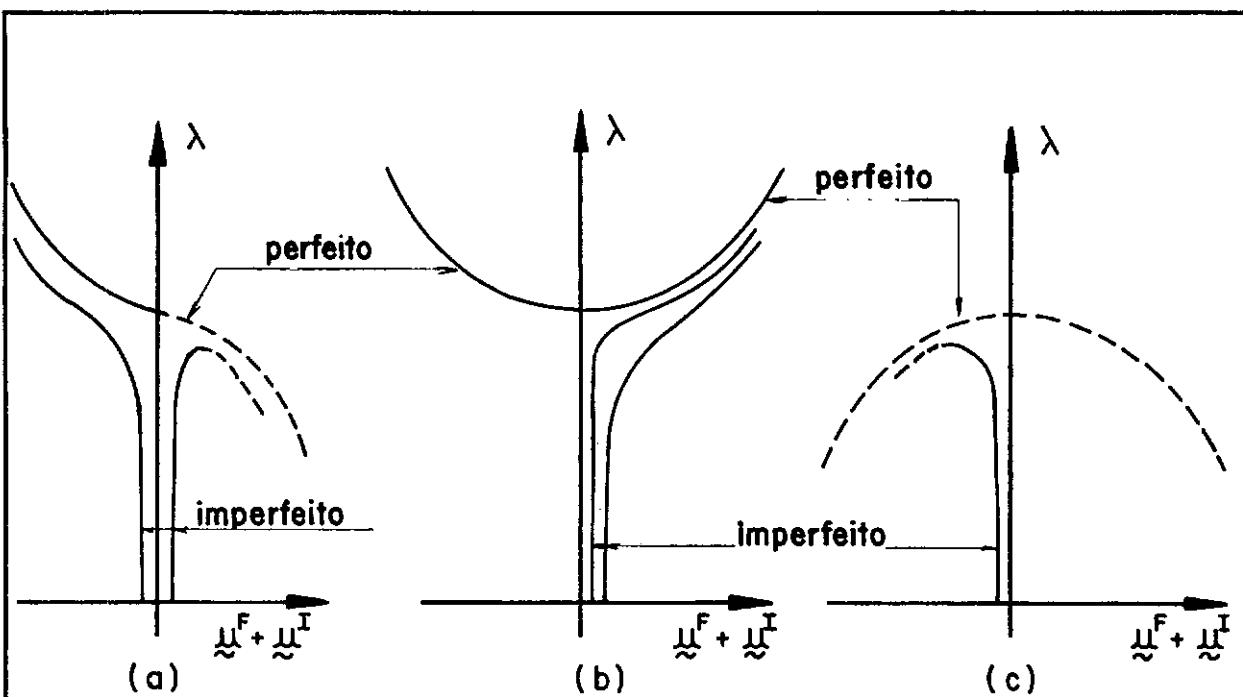


Figura II.1- TRES TIPOS BÁSICOS DE COMPORTAMENTO:
 (a) BIFURCAÇÃO ASSIMÉTRICA; (b) BIFURCAÇÃO SIMÉTRICA
 ESTÁVEL; (c) BIFURCAÇÃO SIMÉTRICA INSTÁVEL.

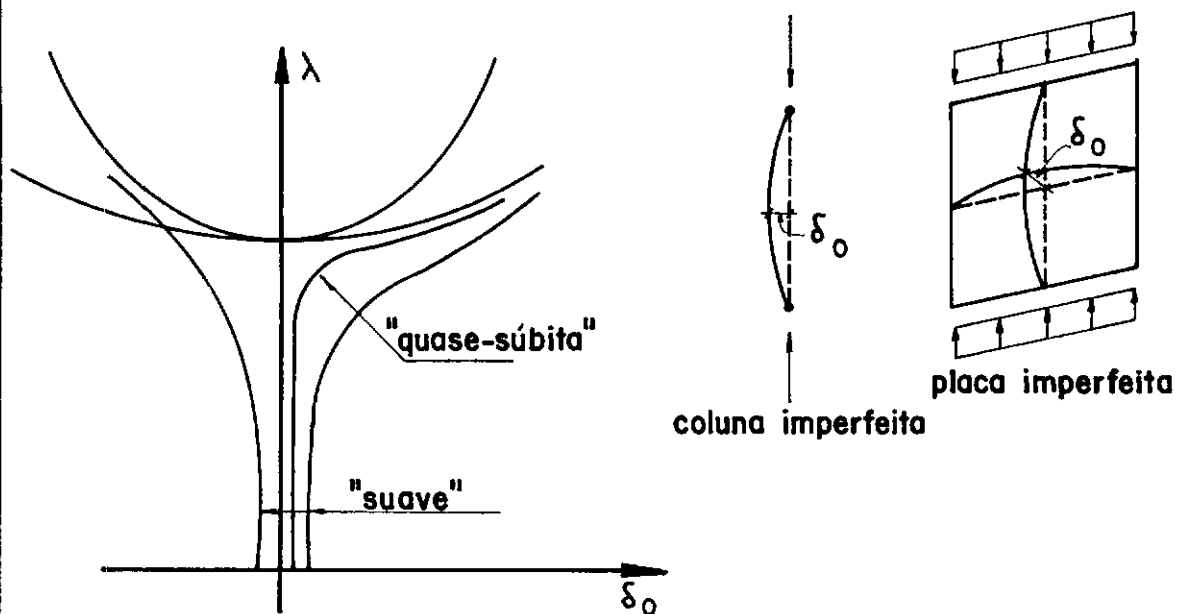


Figura II.2 - TIPOS DE FLAMBAGEM ESTÁVEL.

furcação. Os três tipos são designados por:

- bifurcação assimétrica
- bifurcação simétrica estável
- bifurcação simétrica instável

Colunas esbeltas ou placas finas, geometricamente perfeitas, sob compressão axial, têm comportamento pós-crítico caracterizado por bifurcações simétricas estáveis. Quando imperfeitos, estes sistemas estruturais isolados apresentam um tipo de "flambagem estável" que pode ocorrer de forma "suave" ou "quase-súbita", respectivamente para maiores ou menores imperfeições, dependendo além disso da rigidez pós-crítica inicial, a qual é função da geometria, condições de contorno e modo crítico. Estes comportamentos imperfeitos são ilustrados na Figura (II.2).

A utilização conjunta destes dois elementos estruturais (colunas e placas) exemplificada por colunas formadas por associação de placas finas – curtas ou longas e de seção transversal aberta ou fechada – podem apresentar flambagem local (de placa) ou global (de coluna) de Euler, dependendo da esbeltez de um destes elementos estruturais vistos de forma isolada.

Para o caso de colunas longas (isto é, esbeltas no sentido de Euler) de seção transversal também esbelta (no que se refere a esbeltez de placas associadas) pode ocorrer uma interação entre os dois modos, local e global, levando por vezes a estrutura como um todo a um comportamento pós-crítico instável. Quando sujeitas a imperfeições geométricas, estas colunas também apresentam "flambagem instável" como mostra a Figura (II.3). As situações mais críticas de instabilidade ocorrem para as co-

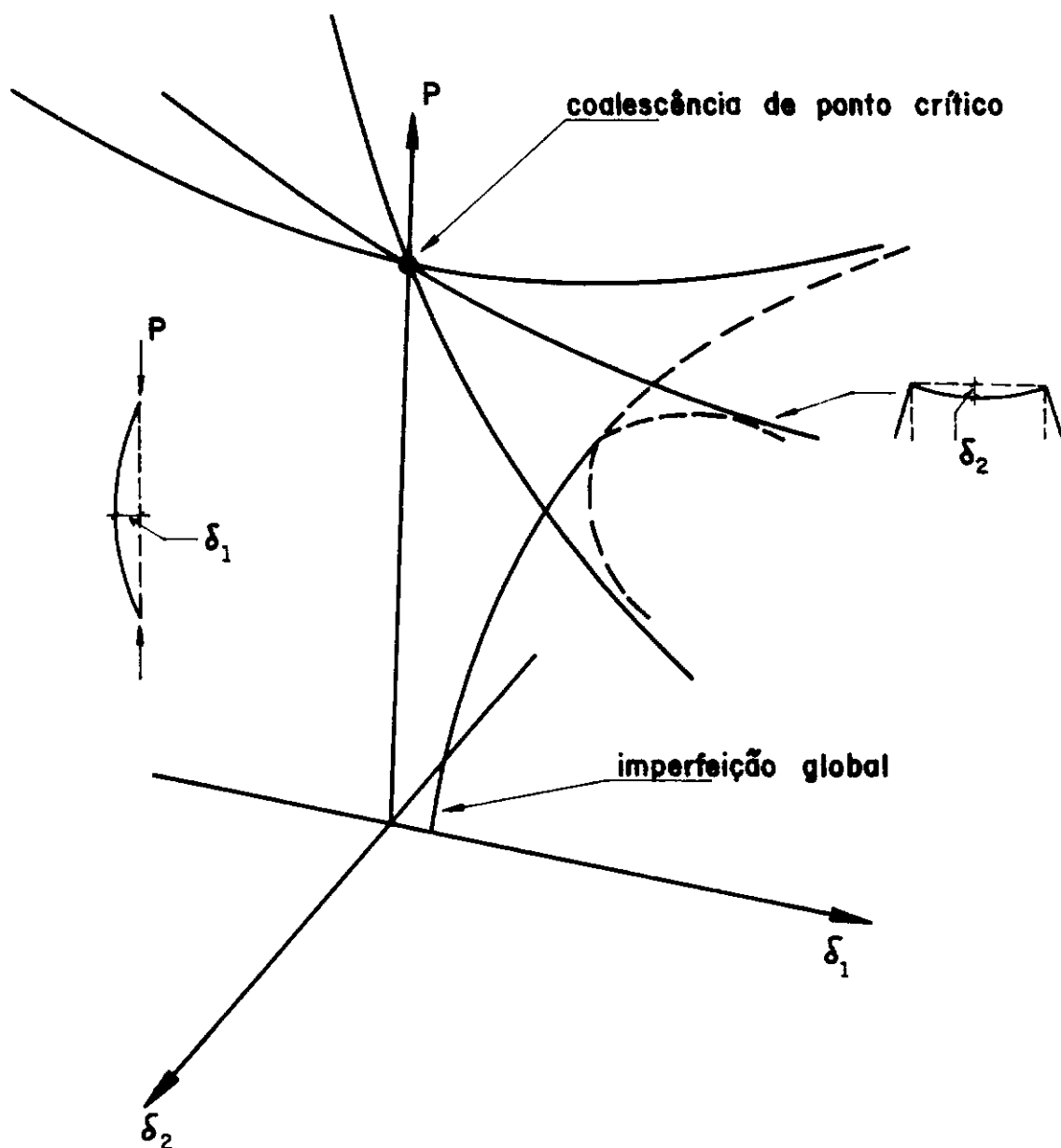


Figura II.3 - COMPORTAMENTO PÓS-CRÍTICO INSTÁVEL APRESENTADO POR COLUNAS FORMADAS POR PLACAS ESBELTAS QUANDO AS CARGAS CRÍTICAS GLOBAL E LOCAL SÃO PRÓXIMAS.

lunas esbeltas cujas cargas críticas local e global se aproximam e coalescem provocando uma interação efetiva entre os modos de flambagem.

II.3. O FUNCIONAL DE ENERGIA POTENCIAL TOTAL PARA UMA PLACA COMPRIMIDA

II.3.1. HIPÓTESES SIMPLIFICADORAS

As hipóteses simplificadoras são aquelas utilizadas na Teoria Não-Linear de Placas de Von Kármán:

a) as deformações e rotações são pequenas quando comparadas com a unidade, de maneira que se pode desprezar os efeitos de mudança na geometria na definição das componentes de tensão e nos limites de integração necessários ao cálculo da energia potencial total;

b) as deformações são, em geral, bem menores que as rotações o que acarretará simplificações nas expressões das componentes de deformação:

c) as linhas normais à superfície média indeformada permanecem normais a esta superfície na configuração deformada e são inextensíveis após a deformação (hipótese de Kirchhoff).

Além disso, como a placa é fina apenas as componentes de deformação no plano da placa serão consideradas.

De acordo com a hipótese b) as componentes de deformação

no plano médio da placa podem ser escritas como:

$$\epsilon_x = u_{,x} + \frac{1}{2} w_{,x}^2$$

$$\epsilon_y = v_{,y} + \frac{1}{2} w_{,y}^2$$

$$\gamma_{xy} = u_{,y} + v_{,x} + w_{,x} w_{,y}$$

(II.10)

onde (x, y, z) é o sistema de coordenadas locais e u, v e w são as componentes de deslocamento. A Figura (II.4) mostra a notação e as convenções para direções positivas das componentes de deslocamento e dos eixos coordenados.

A hipótese c) permite escrever

$$\bar{\epsilon}_x = \epsilon_x + z \chi_x$$

$$\bar{\epsilon}_y = \epsilon_y + z \chi_y$$

$$\bar{\gamma}_{xy} = \gamma_{xy} + 2z \chi_{xy}$$

(II.11)

onde $\bar{\epsilon}_x, \bar{\epsilon}_y$ e $\bar{\gamma}_{xy}$ são as componentes de deformação ao longo da espessura da placa e χ_x, χ_y e χ_{xy} são as mudanças de curvatura definidas como

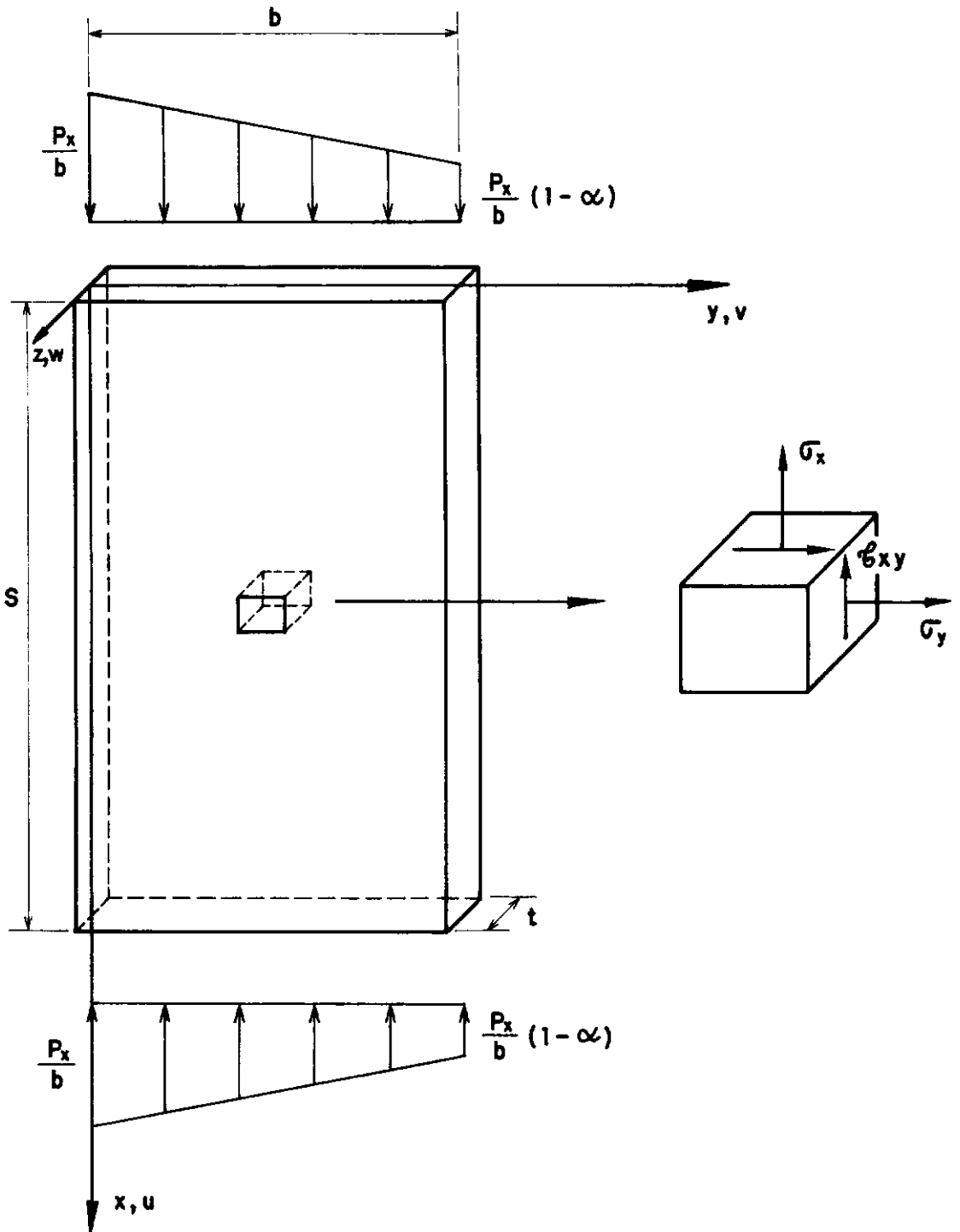


Figura II.4 - PLACA COMPRIMIDA DE COMPRIMENTO S . NOTAÇÃO E SENTIDO POSITIVO DAS COMPONENTES DE DESLOCAMENTO E TENSÃO.

$$\chi_x = - w_{,xx}$$

$$\chi_y = - w_{,yy}$$

$$\chi_{xy} = - w_{,xy}$$

(II.12)

II.3.2. ENERGIA POTENCIAL TOTAL

Considerando uma placa retangular, como a da Figura (II.4), submetida à compressão excêntrica e levando em consideração as hipóteses formuladas no item anterior pode-se escrever a energia de deformação elástica como:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^S \int_0^b \int_{-t/2}^{t/2} (\sigma_x \bar{\epsilon}_x + \sigma_y \bar{\epsilon}_y + \tau_{xy} \bar{\gamma}_{xy}) dz dy dx \quad (II.13)$$

onde as componentes σ_x , σ_y e τ_{xy} do estado plano de tensões em meio isotrópico têm a forma:

$$\sigma_x = \frac{1}{1 - \nu^2} (\bar{\epsilon}_x + \nu \bar{\epsilon}_y)$$

$$\sigma_y = \frac{1}{1 - \nu^2} (\bar{\epsilon}_y + \nu \bar{\epsilon}_x)$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1 + \nu)} \bar{\gamma}_{xy}$$

(II.14)

Substituindo as equações (II.14) na expressão da energia de deformação elástica e integrando segundo z obtêm-se:

$$U = U_m + U_f \quad (\text{II.15a})$$

onde a energia de membrana tem a forma

$$U_m = \frac{K}{2} \int_0^S \int_0^b (\epsilon_x^2 + \epsilon_y^2 + 2 \nu \epsilon_x \epsilon_y + \frac{1 - \nu}{2} \gamma_{xy}^2) dx dy \quad (\text{II.15b})$$

e a energia de flexão

$$U_f = \frac{D}{2} \int_0^S \int_0^b (\chi_x^2 + \chi_y^2 + 2 \nu \chi_x \chi_y + 2 (1 - \nu) \chi_{xy}^2) dx dy, \quad (\text{II.15c})$$

sendo

$$K = \frac{Et}{(1 - \nu^2)}, \text{ o coeficiente de rigidez de membrana}$$

e

$$D = \frac{Et^3}{12 (1 - \nu^2)}, \text{ o coeficiente de rigidez de flexão}$$

As contribuições de energia de deformação elástica de membrana e flexão podem ainda ser escritas em termos de resultantes de esforços internos definidos como se segue.

Resultante de esforços internos de membrana:

$$N_x = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x dz$$

$$N_y = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y dz$$

$$N_{xy} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} dz \quad (\text{II.16})$$

Resultante de momentos internos:

$$M_x = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x z \, dz$$

$$M_y = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y z \, dz$$

$$M_{xy} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} z \, dz$$

(II.17)

Então as contribuições da energia de deformação elástica tornam-se:

$$U_m = \frac{1}{2} \int_0^S \int_0^b (N_x \epsilon_x + N_y \epsilon_y + N_{xy} \gamma_{xy}) \, dx \, dy \quad (\text{II.18a})$$

$$U_f = \frac{1}{2} \int_0^S \int_0^b (M_x \chi_x + M_y \chi_y + 2 M_{xy} \chi_{xy}) \, dx \, dy \quad (\text{II.18b})$$

O potencial de carga externa da placa com carregamento axial excêntrico é dado por

$$\Omega = \frac{P_x}{b} \int_0^S \int_0^b \left(1 - \alpha \frac{y}{b} \right) u_{,x} \, dy \, dx \quad (\text{II.19})$$

onde α é o parâmetro de excentricidade da carga (ver a Figura (II.4)).

A energia potencial total do sistema estrutural é a soma da energia de deformação elástica e da energia potencial das cargas externas. Então,

$$V = U + \Omega \quad (\text{II.2})'$$

onde

V = energia potencial total

$U = U_f + U_m$, \bar{e} a energia de deformação elástica

Ω = potencial de cargas externas

II.3.3. A VARIAÇÃO DA ENERGIA POTENCIAL TOTAL

A condição de estacionariedade dada pela equação (II.9) conduz ao caminho de equilíbrio pós-crítico da estrutura e envolve a variação da energia potencial total escrita como a soma de parcelas que contêm termos quadráticos, cúbicos e quárticos, V_2 , V_3 e V_4 respectivamente. A seguir estas parcelas serão devidamente identificadas através da consideração de um campo de deslocamentos da estrutura deformada numa configuração vizinha \bar{a} fundamental definido como

$$\underline{u}^T = \underline{u}^F + \underline{u}^I \quad (\text{II.20})$$

Desta forma as componentes de deformação específica e as mudanças de curvatura referidas \bar{a} superfície média da placa ficam:

$$\begin{aligned} \epsilon_x^T &= \epsilon_x^F + \epsilon_x^I & \chi_x^T &= \chi_x^F + \chi_x^I \\ \epsilon_y^T &= \epsilon_y^F + \epsilon_y^I & \chi_y^T &= \chi_y^F + \chi_y^I \\ \gamma_{xy}^T &= \gamma_{xy}^F + \gamma_{xy}^I & \chi_{xy}^T &= \chi_{xy}^F + \chi_{xy}^I \end{aligned}$$

(II.21)

Considerando-se que o estado fundamental \bar{e} é assumido como um estado puro de membrana, o caminho fundamental de equilíbrio \bar{e} é descrito por uma relação linear entre carga e deslocamento, observando-se conseqüentemente que

$$\epsilon_x^F = \frac{P_x}{E b t} \left(1 - \alpha \frac{y}{b} \right)$$

$$\epsilon_y^F = - \frac{\nu P_x}{E b t} \left(1 - \alpha \frac{y}{b} \right)$$

$$\gamma_{xy}^F = 0$$

$$\chi_x^F = \chi_y^F = \chi_{xy}^F = 0$$

(II.22)

Para os estados de equilíbrio vizinhos ao fundamental as componentes de deformação específica são escritas segundo a hipótese (b) da seção II.3.1 como a soma das parcelas linear e quadrática tornando-se

$$\epsilon_x^I = \epsilon_x^I + \epsilon_x^{II} = u_{,x} + \frac{1}{2} w_{,x}^2$$

$$\epsilon_y^I = \epsilon_y^I + \epsilon_y^{II} = v_{,y} + \frac{1}{2} w_{,y}^2$$

$$\gamma_{xy}^I = \gamma_{xy}^I + \gamma_{xy}^{II} = (u_{,y} + v_{,x}) + w_{,x} w_{,y}$$

(II.23)

e as mudanças de curvatura são aproximadas linearmente por

$$\chi_x^I = \chi_x' = -w_{,xx}$$

$$\chi_y^I = \chi_y' = -w_{,yy}$$

$$\chi_{xy}^I = \chi_{xy}' = -w_{,xy}$$

(II.24)

Substituindo-se estas expressões nas equações (II.15) e (II.19) pode-se identificar os termos V_0 , V_1 , V_2 , V_3 e V_4

$$V_0 = \frac{K}{2} \int_0^S \int_0^b (\epsilon_x^F{}^2 + \epsilon_y^F{}^2 + 2\nu \epsilon_x^F \epsilon_y^F) dy dx +$$

$$+ \frac{P_x}{b} \int_0^S \int_0^b \left(1 - \alpha \frac{y}{b}\right) \epsilon_x^F dy dx$$

$$V_1 = \frac{K}{2} \int_0^S \int_0^b (2 \epsilon_x^F \epsilon_x' + 2 \epsilon_y^F \epsilon_y' + 2\nu \epsilon_x^F \epsilon_y' + 2\nu \epsilon_y^F \epsilon_x') dy dx +$$

$$+ \frac{P_x}{b} \int_0^S \int_0^b \left(1 - \alpha \frac{y}{b}\right) \epsilon_x' dy dx$$

$$V_2 = \frac{K}{2} \int_0^S \int_0^b (\epsilon_x'^2 + 2 \epsilon_x^F \epsilon_x'' + \epsilon_y'^2 + 2 \epsilon_y^F \epsilon_y'' + 2\nu (\epsilon_x' \epsilon_y' + \epsilon_x^F \epsilon_y'' +$$

$$+ \epsilon_y^F \epsilon_x'') + \frac{1-\nu}{2} \gamma_{xy}'^2) dy dx + \frac{D}{2} \int_0^S \int_0^b (\chi_x'^2 + \chi_y'^2 + 2\nu \chi_x' \chi_y' +$$

$$+ 2(1-\nu) \chi_{xy}'^2) dy dx$$

$$V_3 = \frac{K}{2} \int_0^S \int_0^b (2 \epsilon_x' \epsilon_x'' + 2 \epsilon_y' \epsilon_y'' + 2\nu (\epsilon_x' \epsilon_y'' + \epsilon_y' \epsilon_x'') +$$

$$+ (1-\nu) \gamma_{xy}' \gamma_{xy}'') dy dx$$

$$V_4 = \frac{K}{2} \int_0^S \int_0^b (\epsilon_x''^2 + \epsilon_y''^2 + 2\nu \epsilon_x'' \epsilon_y'' + \frac{1-\nu}{2} \gamma_{xy}''^2) dy dx$$

(II.25)

Estas contribuições de energia podem ainda ser escritas como:

$$V_0 = \int_0^S \int_0^b \left(\frac{N_x^F}{2} \epsilon_x^F + \frac{P_x}{b} \left(1 - \alpha \frac{y}{b} \right) \epsilon_x^F \right) dy dx$$

$$V_1 = \int_0^S \int_0^b \left(N_x^F \epsilon_x' + \frac{P_x}{b} \left(1 - \alpha \frac{y}{b} \right) \epsilon_x' \right) dy dx$$

$$V_2 = \frac{1}{2} \int_0^S \int_0^b (n_x' \epsilon_x' + n_y' \epsilon_y' + n_{xy}' \gamma_{xy}' + N_x^F \epsilon_x'' + n_x'' \epsilon_x^F + n_y'' \epsilon_y^F + m_x' \chi_x' + m_y' \chi_y' + 2 m_{xy}' \chi_{xy}') dy dx$$

$$V_3 = \frac{1}{2} \int_0^S \int_0^b (n_x' \epsilon_x'' + n_x'' \epsilon_x' + n_y' \epsilon_y'' + n_y'' \epsilon_y' + n_{xy}' \gamma_{xy}'' + n_{xy}'' \gamma_{xy}') dy dx$$

$$V_4 = \frac{1}{2} \int_0^S \int_0^b (n_x'' \epsilon_x'' + n_y'' \epsilon_y'' + n_{xy}'' \gamma_{xy}'') dy dx$$

(II.26)

onde

$$n_x' = K (\epsilon_x' + \nu \epsilon_y')$$

$$n_x'' = K (\epsilon_x'' + \nu \epsilon_y'')$$

$$n_y' = K (\epsilon_y' + \nu \epsilon_x')$$

$$n_y'' = K (\epsilon_y'' + \nu \epsilon_x'')$$

$$n_{xy}' = K \frac{(1 - \nu)}{2} \gamma_{xy}'$$

$$n_{xy}'' = K \frac{(1 - \nu)}{2} \gamma_{xy}''$$

(II.27)

e

$$m'_x = D (\chi'_x + \nu \chi'_y)$$

$$m'_y = D (\chi'_y + \nu \chi'_x)$$

$$m'_{xy} = D (1 - \nu) \chi'_{xy}$$

(II.28)

Como a configuração fundamental \bar{e} de equilíbrio, V_1 é nulo. De fato

$$N_x^F = - \frac{P_x}{b} \left(1 - \alpha \frac{y}{b} \right) \quad (II.29)$$

O uso das funções de tensão de Airy definidas como

$$F_{,yy} = \sigma_x, \quad F_{,xx} = \sigma_y \quad \text{e} \quad F_{,xy} = -\tau_{xy} \quad (II.30)$$

onde $F = F(x, y)$, simplifica o problema não-linear uma vez que permite se obter o caminho de equilíbrio em função somente de w e F . Os deslocamentos u e v e suas derivadas foram definidos em termos de w como

$$u_{,x} = \epsilon'_x = \epsilon_x^I - \frac{1}{2} w_{,x}^2 = \frac{1}{E} (F_{,yy}^I - \nu F_{,xx}^I) - \frac{1}{2} w_{,x}^2$$

$$v_{,y} = \epsilon'_y = \epsilon_y^I - \frac{1}{2} w_{,y}^2 = \frac{1}{E} (F_{,xx}^I - \nu F_{,yy}^I) - \frac{1}{2} w_{,y}^2$$

$$u_{,y} + v_{,x} = \gamma'_{xy} = \gamma_{xy}^I - w_{,x} w_{,y} - \frac{2(1+\nu)}{E} F_{,xy}^I - w_{,x} w_{,y} \quad (II.31)$$

Analogamente ao campo de deslocamentos, as funções de tensão podem ser escritas como a soma das parcelas fundamental e incremental

$$F = F^F + F^I \quad (II.32)$$

Substituindo as expressões (II.31) nas equações (II.26) obtêm-se

$$\begin{aligned} V_2 &= \frac{1}{2} \int_0^S \int_0^b [2 N_X^F \epsilon_X'' dy dx + \frac{K}{E^2} (1 - \nu^2) (F_{,xx}^I + F_{,yy}^I)^2 + \\ &+ 2 (1 + \nu) (F_{,xy}^{I^2} - F_{,xx}^I F_{,yy}^I)] dy dx + U_f - V_3 - V_4 \\ V_3 &= \frac{K}{2} \int_0^S \int_0^b \frac{2}{E} (1 - \nu^2) [\epsilon_X'' F_{,yy}^I + \epsilon_Y'' F_{,xx}^I - \gamma_{xy}'' F_{,xy}^I] dy dx - 2 V_4 \\ V_4 &= \frac{K}{2} \int_0^S \int_0^b [\epsilon_X''^2 + \epsilon_Y''^2 + 2 \nu \epsilon_X'' \epsilon_Y'' + \frac{1 - \nu}{2} \gamma_{xy}''^2] dy dx \end{aligned} \quad (II.33)$$

onde

$$N_X^F = F_{,yy}^F t$$

Então a variação total de energia fica:

$$\Delta V = V_2 + V_3 + V_4 =$$

$$= \int_0^S \int_0^b N_x^F \epsilon_x'' dy dx + \frac{t}{2E} \int_0^S \int_0^b [(F_{,yy}^I + F_{,xx}^I)^2 +$$

$$+ 2(1 + \nu)(F_{,xy}^{I^2} - F_{,yy}^I F_{,xx}^I)] dy dx + U_f$$

(II.34)

II.4. EQUAÇÕES DIFERENCIAIS NÃO-LINEARES DE EQUILÍBRIO

Neste trabalho, a aplicação do critério de energia para estabilidade será feita com a variação da energia potencial total das placas expressa na forma da equação (II.34). As funções de tensão ali envolvidas devem satisfazer a equação de compatibilidade de deformações a qual será desenvolvida a seguir passando-se inicialmente pelas equações não-lineares de equilíbrio em termos de deslocamentos.

As equações diferenciais não-lineares são obtidas da extremização do funcional de incremento da energia potencial total, $\Delta V = V_2 + V_3 + V_4$, em uma das formas apresentadas anteriormente, isto é, nas formas das equações (II.25), (II.26) ou (II.34). Tomando as expressões (II.25) para V_2 , V_3 e V_4 e recordando as equações (II.23) e (II.24) a extremização e aplicação do Teorema de Green fornece, além das condições de contorno:

$$\begin{aligned}
& [u_{,xx} + \nu v_{,xy} + w_{,xx} w_{,x} + \nu w_{,xy} w_{,y}] + \\
& + \frac{1}{2} (1 - \nu) [u_{,yy} + v_{,xy} + w_{,xy} w_{,y} + w_{,x} w_{,yy}] = 0
\end{aligned}
\tag{II.35a}$$

$$\begin{aligned}
& [v_{,yy} + \nu u_{,xy} + w_{,yy} w_{,y} + \nu w_{,xy} w_{,x}] + \\
& + \frac{1}{2} (1 - \nu) [u_{,xy} + v_{,xx} + w_{,xx} w_{,y} + w_{,x} w_{,xy}] = 0
\end{aligned}
\tag{II.35b}$$

$$\begin{aligned}
& - N_x^F w_{,xx} - K \left\{ [(u_{,x} + \nu v_{,y}) + \frac{1}{2} (w_{,x}^2 + \nu w_{,y}^2)] w_{,xx} + \right. \\
& + [(u_{,xx} + \nu v_{,xy}) + (w_{,x} w_{,xx} + \nu w_{,y} w_{,xy})] w_{,x} \} - \\
& - \frac{K}{2} (1 - \nu) \{ [v_{,x} + u_{,y} + w_{,x} w_{,y}] w_{,xy} + [v_{,xx} + u_{,xy} + \\
& + w_{,x} w_{,xy} + w_{,xx} w_{,y}] w_{,y} \} - K \{ [v_{,y} + \nu u_{,x}) + \\
& + \frac{1}{2} (w_{,y}^2 + \nu w_{,x}^2)] w_{,yy} + [(v_{,yy} + \nu u_{,xy}) + (w_{,y} w_{,yy} + \\
& + \nu w_{,x} w_{,xy})] w_{,y} \} - \frac{K}{2} (1 - \nu) \{ [v_{,x} + u_{,y} + w_{,x} w_{,y}] w_{,xy} + \\
& + [v_{,xy} + u_{,yy} + w_{,x} w_{,yy} + w_{,xy} w_{,y}] w_{,x} \} + D \nabla^4 w = 0
\end{aligned}
\tag{II.35c}$$

Com auxílio das equações (II.27) e (II.28) identificam-se as resultantes de tensão e as equações não-lineares tornam-se

$$N_{x,x}^I + N_{xy,y}^I = 0 \tag{II.36a}$$

$$N_{xy,y}^I + N_{y,y}^I = 0 \quad (\text{II.36b})$$

$$D \nabla^4 w - w_{,xx} (N_x^F + N_x^I) - w_{,yy} N_y^I - 2 w_{,xy} N_{xy}^I = 0 \quad (\text{II.36c})$$

onde

$$N_x^I = n_x^I + n_x^{II}$$

$$N_y^I = n_y^I + n_y^{II}$$

$$N_{xy}^I = n_{xy}^I + n_{xy}^{II}$$

Introduzindo as funções de tensão definidas como nas equações (II.30), as equações (II.36a e b) ficam automaticamente satisfeitas e a equação (II.36c) torna-se

$$D \nabla^4 w - F_{,yy} \nabla^2 w_{,xx} - F_{,xx} \nabla^2 w_{,yy} + 2 F_{,xy} \nabla^2 w_{,xy} = 0 \quad (\text{II.37})$$

Para dar prosseguimento à análise em termos de tensões é preciso assegurar a compatibilidade entre deformações no plano da placa. Diferencia-se, então, convenientemente as equações (II.10), e somando-as obtêm-se:

$$\epsilon_{x,yy} + \epsilon_{y,xx} + \gamma_{xy,xy} = w_{,xy}^2 - w_{,xx} w_{,yy} \quad (\text{II.38})$$

Escrevendo-se a equação (II.38) em termos de tensões chega-se à equação de compatibilidade

$$\nabla^4 F = E (w_{,xy}^2 - w_{,xx} w_{,yy}) \quad (\text{II.39})$$

As equações (II.37) e (II.39) são conhecidas como as equações da teoria não-linear de placas de Von Kármán.

CAPÍTULO III

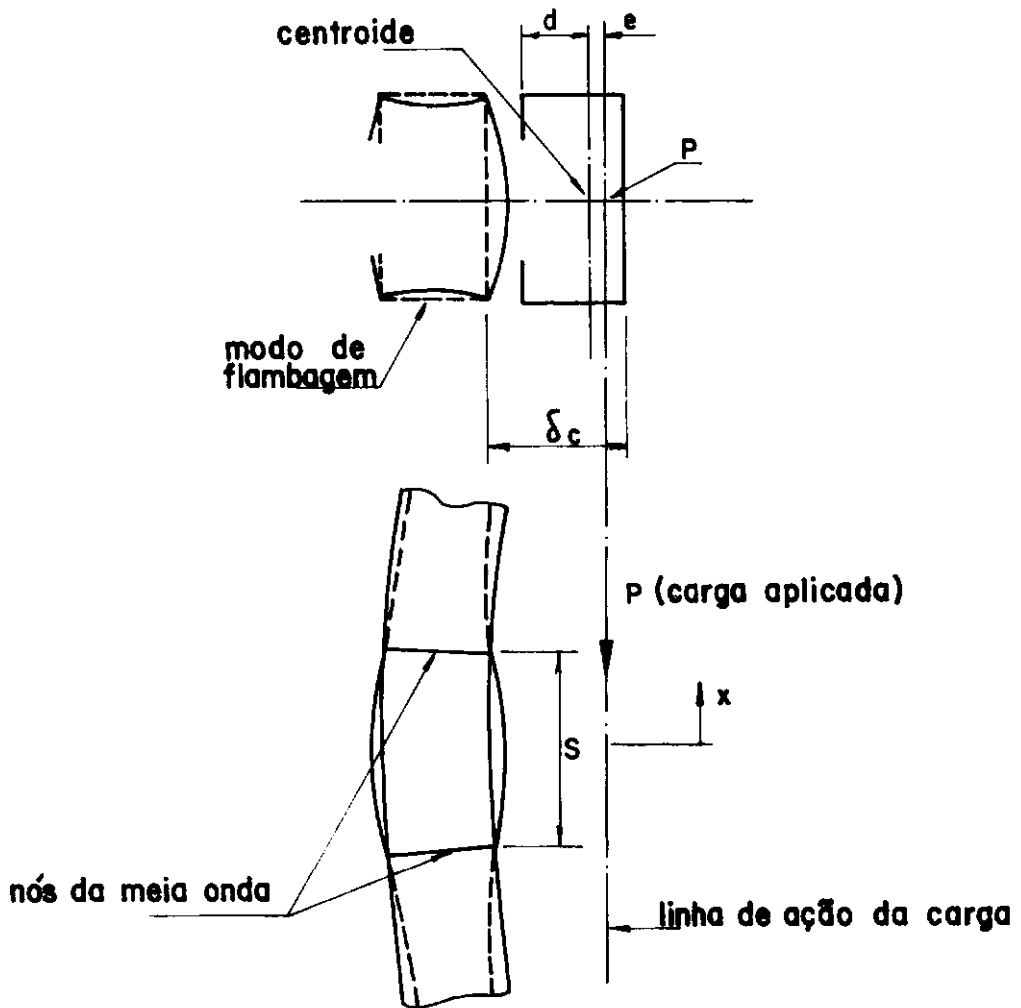
CAMPOS DE DESLOCAMENTOS E TENSÃO PARA SEÇÕES COMPOSTAS POR PLACAS ESBELTAS

III.1. INTRODUÇÃO

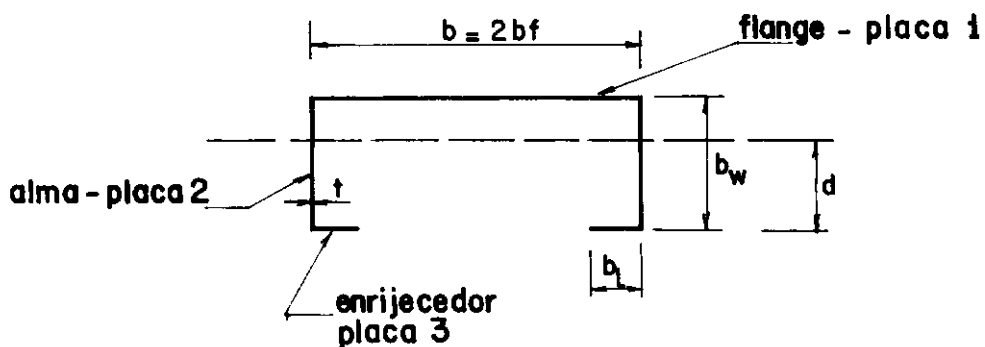
Para o estudo do comportamento pós-crítico local de colunas de seção U enrijecidas examina-se inicialmente uma coluna curta sujeita a carga excêntrica. A Figura (III.1) mostra a seção transversal da coluna de comprimento S carregada axialmente com excentricidade e .

A Figura (III.2) indica a largura do enrijecedor, b_1 , a largura da alma, b_w , e a semi-largura do flange, b_f ; onde d é a posição do centroide a partir do enrijecedor e t a espessura comum às três placas.

O encurtamento das placas para um carregamento excêntrico é mostrado na Figura (III.3). No flange este encurtamento é constante e igual a u^* , na alma varia linearmente de u^* a $u^* (1 - \alpha)$ — sendo α o parâmetro de excentricidade — e no enrijecedor é constante e igual a $u^* (1 - \alpha)$.



**Figura III.1 - COLUNA DE SEÇÃO U ENRIJECIDA
CARREGADA EXCENTRICAMENTE.**



**Figura III.2 - NOTAÇÃO E NOMENCLATURA DA SEÇÃO
TRANSVERSAL.**

A coluna curta assim definida constitui um trecho isolado de uma coluna longa deformada localmente por ondas senoidais de comprimento $2S$. Na análise desta parte da coluna esbelta utiliza-se o método de Rayleigh-Ritz aproximando-se o campo de deslocamentos de cada placa por uma função cinematicamente admissível. Para a seção transversal apresentada submetida a encurtamentos longitudinais descritos por u^* e α , assume-se que as deflexões transversais críticas de cada placa têm a forma

$$w_i = Y_i(y_i) \cos \frac{\pi x}{S} \quad (\text{III.1})$$

onde

$$Y_i(y_i) = \sum_{n=1}^N A_n Y_{in}(y_i) \quad (\text{III.2})$$

sendo N o número de termos usados na solução, i o número associado a cada placa e as funções Y_{in} polinômios algébricos que satisfazem as condições de contorno nas junções das placas. Estas condições de contorno serão apresentadas na seção (III.2) e as funções deslocamento na seção (III.3).

Na análise do comportamento pós-crítico as tensões na superfície média das placas devem satisfazer a equação de compatibilidade de Von Kármán, equação (II.39). Na seção (III.4) as funções de tensão de Airy serão determinadas de maneira a atender a esta condição.

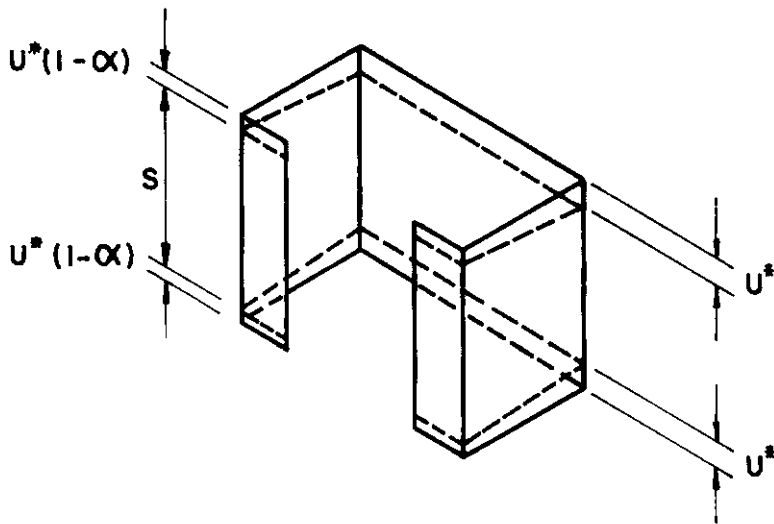


Figura III.3 - ENCURTAMENTO DAS PLACAS PARA UM CARREGAMENTO EXCÊNTRICO.

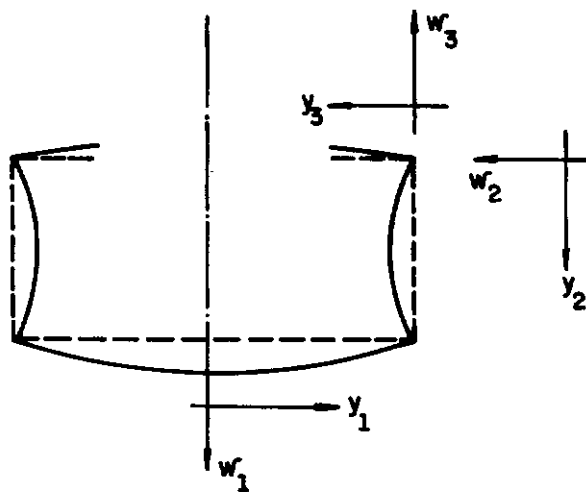


Figura III.4 - CONFIGURAÇÃO DEFORMADA DA SEÇÃO E SISTEMA DE COORDENADAS PARA DEFLEXÕES LOCAIS.

III.2. CONDIÇÕES DE CONTORNO E FUNÇÕES DESLOCAMENTO

A configuração deformada da seção transversal da coluna tem a forma mostrada na Figura (III.4), sendo as direções positivas do sistema de eixos local as indicadas.

As deflexões transversais de cada uma das placas descritas pelas equações (III.1) e (III.2) têm funções Y_{in} dadas por [14]:

$$Y_{1n} = A_n \left[1 - \left(\frac{y_1}{b_f} \right)^{a_n} \right] + B_n \left[1 - \left(\frac{y_1}{b_f} \right)^{b_n} \right] \quad (\text{III.3a})$$

$$Y_{2n} = D_n \frac{y_2}{b_w} + G_n \left(\frac{y_2}{b_w} \right)^2 + M_n \left(\frac{y_2}{b_w} \right)^{m_n} \quad (\text{III.3b})$$

$$Y_{3n} = Q_n \frac{y_3}{b_l} + R_n \left(\frac{y_3}{b_l} \right)^2 + T_n \left(\frac{y_3}{b_l} \right)^{t_n} \quad (\text{III.3c})$$

Os coeficientes B_n , D_n , G_n , M_n , Q_n , R_n e T_n serão escritos em função dos coeficientes A_n como aparece na equação (III.2) através do atendimento das condições de contorno nos bordos das placas. Os expoentes a_n , b_n , t_n e m_n são inteiros sujeitos a certas restrições apresentadas mais adiante na seção (III.3).

As condições de contorno a serem satisfeitas no bordo flange-alma são:

a) A linha de bordo permanece reta e portanto as deflexões laterais do flange e da alma são nulas neste ponto.

b) O ângulo entre as placas (90°) permanece inalterado

após a deformação da seção transversal.

c) Existe equilíbrio de momentos.

Estas condições de contorno podem ser traduzidas pelas seguintes equações, válidas no ponto ($y_1 = b_f$, $y_2 = b_w$)

$$a) w_1 = w_2 = 0$$

$$b) w_{1,y_1} = w_{2,y_2}$$

$$c) [w_{1,y_1 y_1} + \nu w_{1,xx}] = - [w_{2,y_2 y_2} + \nu w_{2,xx}] \quad (III.4)$$

Utilizando-se as equações (III.1) e (III.2) as condições (III.4) tornam-se:

$$Y_{1n} = Y_{2n} = 0 \quad (III.5a,b)$$

$$Y'_{1n} = Y'_{2n} \quad (III.5c)$$

$$Y''_{1n} = - Y''_{2n} \quad (III.5d)$$

em $y_1 = b_f$ e $y_2 = b_w$.

As condições de contorno na junção alma-enrijecedor são análogas. A condição (a) é válida para enrijecedores com largura suficiente para impedir os deslocamentos da alma na aresta de junção ou seja impor ali uma condição similar à de apoio simples. De acordo com WALKER [13] observa-se na prática que para relações b_f/b_w maiores que 0,2 a areta permanece reta. Este assunto será discutido mais adiante quando da análise de resul-

tados do cálculo de cargas críticas.

As condições de contorno no ponto ($y_2 = 0$, $y_3 = 0$) são:

$$Y_{2n} = Y_{3n} = 0 \quad (\text{III.6a,b})$$

$$Y'_{2n} = Y'_{3n} \quad (\text{III.6c})$$

$$Y''_{2n} = - Y''_{3n} \quad (\text{III.6d})$$

No bordo livre do enrijecedor isto é, em $y_3 = b_1$, tem-se como condições de contorno:

a) momento nulo

b) tensão cisalhante nula

Na verdade a condição (b) impõe um equilíbrio entre a força cisalhante e aquela resultante da distribuição de momentos torsores M_{xy} ao longo do bordo livre da placa.

Então estas condições podem ser traduzidas como

$$w_{3,y_3 y_3} + \nu w_{3,xx} = 0 \quad (\text{III.7a})$$

$$w_{3,y_3 y_3 y_3} + (2 - \nu) w_{3,y_3 xx} = 0 \quad (\text{III.7b})$$

Utilizando-se novamente as equações (III.1) e (III.2) tem-se

$$Y''_{3n} - \nu \frac{\pi^2}{S^2} Y_{3n} = 0 \quad (\text{III.7c})$$

$$Y'''_{3n} - (2 - \nu) \frac{\pi^2}{S^2} Y'_{3n} = 0 \quad (\text{III.7d})$$

válidas em $y_3 = b_1$.

As funções de deslocamentos transversais w_i serão obtidas satisfazendo-se as equações (III.5), (III.6) e (III.8) que refletem as condições de contorno nos bordos das placas.

É necessário considerar-se ainda os encurtamentos de extremidade:

- compressão no flange u^*
- compressão na alma $u^* (1 - \alpha + \frac{\alpha}{b_w} y_2)$
- compressão no enrijecedor $u^* (1 - \alpha)$

III.3. ATENDIMENTO DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO

As funções Y_{in} e suas derivadas serão utilizadas para satisfazer as condições (III.5), (III.6) e (III.8) de forma a se escrever os coeficientes B_n , D_n , G_n , M_n , Q_n , R_n e T_n das equações (III.3) em função apenas de A_n .

A equação (III.5a) em $y_1 = b_f$ está automaticamente satisfeita uma vez que a função escolhida Y_{1n} é nula neste ponto. Substituindo-se Y_{1n} , Y_{2n} e suas derivadas nas outras três equações (III.5) obtêm-se:

$$D_n + G_n + M_n = 0 \quad (\text{III.8a})$$

$$\frac{b_w}{b_f} [A_n a_n + B_n b_n] = - [D_n + 2 G_n + M_n m_n] \quad (\text{III.8b})$$

$$\frac{b_w^2}{b_f} [A_n a_n (a_n - 1) + B_n b_n (b_n - 1)] = [2 G_n + M_n m_n (m_n - 1)] \quad (\text{III.8c})$$

As equações (III.6a e b) ficam automaticamente satisfeitas se t_n e m_n são não nulos. Substituindo-se Y'_{in} e Y''_{in} em (III.6c e d) obtêm-se

$$\frac{D_n}{b_w} = \frac{Q_n}{b_l} \quad (\text{III.9})$$

$$\frac{G_n}{b_w^2} = - \frac{R_n}{b_l^2}$$

válidas para m_n e t_n diferentes de 1 e 2.

A substituição de Y_{3n} e suas derivadas nas equações (III.7) conduzem às seguintes expressões que traduzem as condições de contorno no bordo livre do enrijecedor

$$\begin{aligned} \frac{1}{b_l^2} [2 R_n + T_n t_n (t_n - 1)] - \nu \frac{\pi^2}{S^2} [Q_n + R_n + T_n] &= 0 \\ \frac{1}{b_l^3} [T_n t_n (t_n - 1) (t_n - 2)] - (2 - \nu) \frac{\pi^2}{b_l S^2} [Q_n + 2 R_n + \\ + T_n t_n] &= 0 \end{aligned} \quad (\text{III.10})$$

Da manipulação algébrica das equações (III.8), (III.9) e (III.10) resultam as expressões para os coeficientes B_n , D_n , G_n , M_n , Q_n , R_n e T_n escritos em função de A_n .

$$B_n = - \xi_n A_n \quad (\text{III.11})$$

onde

$$\xi_n = \frac{[[1-\eta_n \frac{b_1}{b_w}](k_n-1)(k_n-2)-[2+\frac{b_w}{b_f}(a_n-1)][(k_n-1)\eta_n \frac{b_1}{b_w} - (k_n-2)]](\frac{a_n}{b_n})}{[[1-\eta_n \frac{b_1}{b_w}](k_n-1)(k_n-2)-[2+\frac{b_w}{b_f}(b_n-1)][(k_n-1)\eta_n \frac{b_1}{b_w} - (k_n-2)]]}$$

e

$$\eta_n = \frac{[2(-\frac{\pi b_1}{S})^2(2-\nu)[t_n(t_n-1)-\nu(-\frac{\pi b_1}{S})^2]+[2-\nu(-\frac{\pi b_1}{S})^2][(t_n-1)(t_n-2)-(2-\nu)(-\frac{\pi b_1}{S})^2]t_n]}{[\nu(-\frac{\pi b_1}{S})^2[(t_n-1)(t_n-2)-(2-\nu)(-\frac{\pi b_1}{S})^2]t_n-(\frac{\pi b_1}{S})^2(2-\nu)[t_n(t_n-1)-\nu(-\frac{\pi b_1}{S})^2]}$$

$$M_n = \beta_n A_n \quad (\text{III.12})$$

onde

$$\beta_n = \frac{(\frac{b_w}{b_f})^2 [a_n (a_n - 1) - \xi_n b_n (b_n - 1)] + 2 \frac{b_w}{b_f} [a_n - \xi_n b_n]}{(m_n - 1) (m_n - 2)}$$

$$G_n = - \gamma_n A_n \quad (\text{III.13})$$

onde

$$\gamma_n = \frac{b_w}{b_f} [a_n - \xi_n b_n] + \beta_n (m_n - 1)$$

$$D_n = \mu_n A_n \quad (\text{III.14})$$

onde

$$\mu_n = \gamma_n - \beta_n$$

$$Q_n = \rho_n A_n \quad (\text{III.15})$$

onde

$$\rho_n = \frac{b_1}{b_w} \mu_n$$

$$R_n = \Omega_n A_n \quad (\text{III.16})$$

onde

$$\Omega_n = \left(\frac{b_1}{b_w} \right)^2 \gamma_n$$

$$T_n = \tau_n A_n \quad (\text{III.17})$$

onde

$$\tau_n = \left[\frac{\nu \left(\pi \frac{b_1}{S} \right)^2 [\rho_n + \Omega_n] - 2 \Omega_n}{t_n (t_n - 1) - \nu \left(\frac{\pi b_1}{S} \right)^2} \right]$$

A seguir as funções deslocamento são escritas em função de A_n satisfazendo as condições de equilíbrio e compatibilidade nos bordos das placas.

$$y_{1n} = A_n \left\{ \left[1 - \left(\frac{y_1}{b_f} \right)^{a_n} \right] - \xi_n \left[1 - \left(\frac{y_1}{b_f} \right)^{b_n} \right] \right\}$$

$$y_{2n} = A_n \left\{ \mu_n \frac{y_2}{b_w} - \gamma_n \left(\frac{y_2}{b_w} \right)^2 + \beta_n \left(\frac{y_2}{b_w} \right)^{m_n} \right\}$$

$$Y_{3n} = A_n \left\{ \rho_n \frac{y_3}{b_1} + \Omega_n \left(\frac{y_3}{b_1} \right)^2 + \tau_n \left(\frac{y_3}{b_1} \right)^{t_n} \right\}, \quad (\text{III.18})$$

onde os expoentes a_n e b_n são inteiros pares de maneira a garantir a simetria e os expoentes m_n e t_n são diferentes de zero, um e dois.

No presente trabalho faz-se a análise do comportamento pós-crítico da coluna apresentada com o uso de dois termos nas funções Y_{in} . Os valores dos expoentes escolhidos são indicados a seguir:

flange	$a_1 = 2$	$b_1 = 4$;	$a_2 = 4$	$b_2 = 6$
alma	$m_1 = 3$		$m_2 = 4$	
enrijecedor	$t_1 = 3$		$t_2 = 4$	

III.4. FUNÇÕES DE TENSÃO DE AIRY

Na análise do comportamento pós-crítico as tensões no plano médio das placas devem satisfazer a equação (II.39), conhecida como equação de compatibilidade de Von Kármán:

$$\nabla^4 F_i = E [w_{i,xy}^2 - w_{i,xx} w_{i,y_i y_i}] \quad (\text{II.39})'$$

Tomando-se a forma geral das funções w_i da equação (III.1) e substituindo-se na equação (II.39) obtêm-se:

$$\nabla^4 F_i = \frac{E \pi^2}{2 S^2} \left\{ [Y_i Y_i'' + Y_i'^2] + [Y_i Y_i'' - Y_i'^2] \cos \frac{2 \pi x}{S} \right\} \quad (\text{III.19})$$

A solução da equação (III.19) pode ser escrita na seguinte forma

$$F_i = F_{i1} + F_{i2} \cos \frac{2 \pi x}{S} \quad (\text{III.20})$$

onde F_{i1} e F_{i2} são funções apenas de y_i .

A substituição desta forma de solução na equação (III.19) fornece

$$F_{i1}'''' = \frac{E \pi^2}{2 S^2} [Y_i Y_i'' + Y_i'^2] \quad (\text{III.21})$$

$$F_{i2}'''' - 2 \left(\frac{2 \pi}{S} \right)^2 F_{i2}'' + \left(\frac{2 \pi}{S} \right)^4 F_{i2} = \frac{E \pi^2}{2 S^2} [Y_i Y_i'' - Y_i'^2] \quad (\text{III.22})$$

A resolução das equações (III.21) e (III.22) conduz à solução final da equação de compatibilidade.

Obtenção de F_{i1}''

A parcela F_{i1} produz uma tensão apenas na direção x e portanto a função de interesse é F_{i1}'' . Integrando a equação (III.21) duas vezes obtêm-se:

$$F_{i1}'' = \frac{E \pi^2}{4 S^2} Y_i^2 + C_1 y_i + C_2 \quad (\text{III.23})$$

onde os termos envolvendo as constantes C_1 e C_2 representam as tensões antes da flambagem local. Para se obter as tensões pré-críticas correspondentes aos encurtamentos mostrados na Figura (III.3) os coeficientes C_1 e C_2 devem ter os seguintes va-

lores.

$$\begin{array}{lll}
 \text{flange} & C_1 = 0 & , C_2 = -2 E \frac{u^*}{S} \\
 \text{alma} & C_1 = -2 E \frac{\alpha}{b_w} \frac{u^*}{S} & , C_2 = -2 E (1 - \alpha) \frac{u^*}{S} \\
 \text{enrijecedor} & C_1 = 0 & , C_2 = -2 E (1 - \alpha) \frac{u^*}{S}
 \end{array}
 \quad (\text{III.24})$$

A função F_{i1}'' contém a parcela linear de F_i'' associada ao estado fundamental de equilíbrio. Pode-se então escrever:

$$\begin{aligned}
 N_{x1}^F &= -2 E t \frac{u^*}{S} = \sigma^* t \\
 N_{x2}^F &= -2 E t \frac{u^*}{S} \left[\frac{\alpha}{b_w} y_2 + (1 - \alpha) \right] = \sigma^* t \left[\frac{\alpha}{b_w} y_2 + (1 - \alpha) \right] \\
 N_{x3}^F &= -2 E t \frac{u^*}{S} (1 - \alpha) = \sigma^* t (1 - \alpha)
 \end{aligned}
 \quad (\text{III.25})$$

onde σ^* é a tensão axial correspondente ao encurtamento u^* .

Obtenção de F_{i2}

A solução geral da equação (III.22) em F_{i2} é composta da solução F_{i2h} da equação homogênea associada

$$F_{i2}'''' - 2 \left(\frac{2 \pi}{S} \right)^2 F_{i2}'' + \left(\frac{2 \pi}{S} \right)^4 F_{i2} = 0
 \quad (\text{III.26})$$

somada a uma solução particular F_{i2p} .

A função F_{i_2h} tem a seguinte forma

$$F_{i_2h} = K_{1i} e^{Gy_i} + K_{2i} y_i e^{Gy_i} + K_{3i} e^{-Gy_i} + K_{4i} y_i e^{-Gy_i} \quad (\text{III.27})$$

onde $G = \frac{2\pi}{S}$. Os coeficientes K_{ji} serão obtidos mediante atendimento das condições de contorno em termos de tensões nos bordos das placas.

A função F_{i_2p} é obtida pelo método dos coeficientes a determinar.

A solução particular F_{i_2p}

A equação (III.22) pode ser reescrita como

$$(D^2 - G^2)^2 F_{i_2} = h(y_i) \quad (\text{III.22})'$$

A solução particular F_{i_2p} desta equação está contida na solução geral da equação

$$H(D^2 - G^2)^2 F_{i_2} = 0 \quad (\text{III.29})$$

onde H é um operador que anula $h(y_i)$.

A função $h(y_i)$ é um polinômio algébrico cujo grau varia conforme a placa e depende dos expoentes a_n , b_n , m_n e t_n escolhidos. Assim, (III.29) torna-se

$$\begin{array}{ll} i = 1 & \text{flange} \quad D^{11} (D^2 - G^2)^2 F_{12} = 0 \\ i = 2 & \text{alma} \quad D^7 (D^2 - G^2)^2 F_{22} = 0 \\ i = 3 & \text{enrijecedor} \quad D^7 (D^2 - G^2)^2 F_{32} = 0 \end{array}$$

(III.30)

e portanto, a solução particular F_{i2p} tem, para cada placa, a seguinte forma:

$$F_{12p} = C_1 + C_2 y_1 + C_3 y_1^2 + \dots + C_{11} y_1^{10}$$

$$F_{22p} = D_1 + D_2 y_2 + D_3 y_2^2 + \dots + D_7 y_2^6$$

$$F_{32p} = E_1 + E_2 y_3 + E_3 y_3^2 + \dots + E_7 y_3^6$$

(III.31)

Substituindo-se a forma de F_{i2p} na equação (III.22) e igualando os termos de mesmo grau em y_i obtêm-se os coeficientes C_i , D_i e E_i .

Para a placa 1 tem-se:

$$C_{11} = \frac{E S^2}{8 \pi^2 b_f^2} \frac{1}{b_f^{10}} A_2^2 \left[-\frac{3}{2} \xi_2^2 \right] = \frac{C_0}{b_f^{10}} A_2^2 C_{11,3} \quad (\text{III.32})$$

onde

$$C_0 = \frac{E S^2}{8 \pi^2 b_f^2}$$

$$C_9 = \frac{C_0}{b_f^8} [A_1 A_2 C_{9,2} + A_2^2 C_{9,3}] \quad (\text{III.33})$$

onde

$$C_{9,2} = -\frac{3}{2} \xi_1 \xi_2 \quad \text{e} \quad C_{9,3} = \frac{3}{2} \xi_2 + \frac{180}{4} \left(\frac{S}{\pi b_f} \right)^2 C_{11,3}$$

$$C_7 = \frac{C_0}{b_f^6} [A_1^2 C_{7,1} + A_1 A_2 C_{7,2} + A_2^2 C_{7,3}] \quad (\text{III.34})$$

onde

$$C_{7,1} = -\xi_1^2$$

$$C_{7,2} = 2(\xi_1 - \xi_2) + \frac{112}{4} \left(\frac{S}{\pi b_f} \right)^2 C_{9,2}$$

$$C_{7,3} = -1 + \frac{112}{4} \left(\frac{S}{\pi b_f} \right)^2 C_{9,3} - \frac{5040}{16} \left(\frac{S}{\pi b_f} \right)^4 C_{11,3}$$

$$C_5 = \frac{C_0}{b_f^4} [A_1^2 C_{5,1} + A_1 A_2 C_{5,2} + A_2^2 C_{5,3}] \quad (\text{III.35})$$

onde

$$C_{5,1} = \frac{\xi_1}{2} + 15 \left(\frac{S}{\pi b_f} \right)^2 C_{7,1}$$

$$C_{5,2} = -\frac{1}{2} + \frac{15}{2} \xi_2 - \frac{15}{2} \xi_1 \xi_2 + 15 \left(\frac{S}{\pi b_f} \right)^2 C_{7,2} - \\ - 105 \left(\frac{S}{\pi b_f} \right)^4 C_{9,2}$$

$$C_{5,3} = \frac{15}{2} \xi_2 (1 - \xi_2) + 15 \left(\frac{S}{\pi b_f} \right)^2 C_{7,3} - 105 \left(\frac{S}{\pi b_f} \right)^4 C_{9,3}$$

$$C_3 = \frac{C_0}{b_f^2} [A_1 C_{3,1} + A_1 A_2 C_{3,2} + A_2^2 C_{3,3}] \quad (\text{III.36})$$

onde

$$C_{3,1} = -\frac{1}{2} + 3 \xi_1 - 3 \xi_1^2 + 6 \left(\frac{S}{\pi b_f} \right)^2 C_{5,1} - \frac{360}{16} \left(\frac{S}{\pi b_f} \right)^4 C_{7,1}$$

$$C_{3,2} = 3 + 6 \xi_1 - 3 \xi_1 \xi_2 + 6 \left(\frac{S}{\pi b_f} \right)^2 C_{5,2} - \frac{360}{16} \left(\frac{S}{\pi b_f} \right)^4 C_{7,2}$$

$$C_{3,3} = -3 + 3 \xi_2 + 6 \left(\frac{S}{\pi b_f} \right)^2 C_{5,3} - \frac{360}{16} \left(\frac{S}{\pi b_f} \right)^4 C_{7,3}$$

$$C_1 = C_0 [A_1^2 C_{1,1} + A_1 A_2 C_{1,2} + A_2^2 C_{1,3}] \quad (\text{III.37})$$

onde

$$C_{1,1} = \frac{\xi_1}{2} - \frac{1}{2} + \left(\frac{S}{\pi b_f} \right)^2 C_{3,1} - \frac{3}{2} \left(\frac{S}{\pi b_f} \right)^4 C_{5,1}$$

$$C_{1,2} = \frac{\xi_2}{2} - \frac{1}{2} + \left(\frac{S}{\pi b_f} \right)^2 C_{3,2} - \frac{3}{2} \left(\frac{S}{\pi b_f} \right)^4 C_{5,2}$$

$$C_{1,3} = \left(\frac{S}{\pi b_f} \right)^2 C_{3,3} - \frac{3}{2} \left(\frac{S}{\pi b_f} \right)^4 C_{5,3}$$

Os coeficientes C_2 , C_4 , C_6 , C_8 e C_{10} são nulos uma vez que $h(y_1)$ é uma função par.

Para a placa 2 obtêm-se:

$$D_7 = \frac{D_0}{b_w^6} [A_2^2 D_{7,3}] \quad (\text{III.38})$$

onde

$$D_0 = \frac{E S^2}{8 \pi^2 b_w^2}$$

$$D_{7,3} = -\beta_2^2$$

$$D_6 = \frac{D_0}{b_w^5} [A_1 A_2 D_{6,2}] \quad (\text{III.39})$$

onde

$$D_{6,2} = -\frac{3}{2} \beta_1 \beta_2$$

$$D_5 = \frac{D_0}{b_w^4} [A_1^2 D_{5,1} + A_1 A_2 D_{5,2} + A_2^2 D_{5,3}] \quad (\text{III.40})$$

onde

$$D_{5,1} = -\frac{3}{4} \beta_1^2$$

$$D_{5,2} = \frac{\gamma_1 \beta_2}{2}$$

$$D_{5,3} = \frac{1}{2} \gamma_2 \beta_2 + 15 \left(-\frac{S}{\pi b_w} \right)^2 D_{7,3}$$

$$D_4 = \frac{D_0}{b_w^3} [A_1^2 D_{4,1} + A_1 A_2 D_{4,2} + A_2^2 D_{4,3}] \quad (\text{III.41})$$

onde

$$D_{4,1} = \gamma_1 \beta_1$$

$$D_{4,2} = \beta_1 \gamma_2 + \mu_1 \beta_2 + 10 \left(\frac{S}{\pi b_W} \right)^2 D_{6,2}$$

$$D_{4,3} = \mu_2 \beta_2$$

$$D_3 = \frac{D_0}{b_W^2} [A_1^2 D_{3,1} + A_1 A_2 D_{3,2} + A_2^2 D_{3,3}] \quad (\text{III.42})$$

onde

$$D_{3,1} = -\frac{1}{2} \gamma_1^2 + 6 \left(\frac{S}{\pi b_W} \right)^2 D_{5,1}$$

$$D_{3,2} = -\gamma_1 \gamma_2 + 6 \left(\frac{S}{\pi b_W} \right)^2 D_{5,2}$$

$$D_{3,3} = -\frac{\gamma_2^2}{2} + 6 \left(\frac{S}{\pi b_W} \right)^2 D_{5,3} - \frac{360}{16} \left(\frac{S}{\pi b_W} \right)^4 D_{7,3}$$

$$D_2 = \frac{D_0}{b_W} [A_1^2 D_{2,1} + A_1 A_2 D_{2,2} + A_2^2 D_{2,3}] \quad (\text{III.43})$$

onde

$$D_{2,1} = \frac{\mu_1 \gamma_1}{2} + 3 \left(\frac{S}{\pi b_W} \right)^2 D_{4,1}$$

$$D_{2,2} = \frac{\mu_1 \gamma_2}{2} + \frac{\mu_2 \gamma_1}{2} + 3 \left(\frac{S}{\pi b_W} \right)^2 D_{4,2} - \frac{120}{16} \left(\frac{S}{\pi b_W} \right)^4 D_{6,2}$$

$$D_{2,3} = \frac{\mu_2 \gamma_2}{2} + 3 \left(\frac{S}{\pi b_W} \right)^2 D_{4,3}$$

$$D_1 = D_0 [A_1^2 D_{1,1} + A_1 A_2 D_{1,2} + A_2^2 D_{1,3}] \quad (\text{III.44})$$

onde

$$D_{1,1} = -\frac{\mu_1^2}{4} + \left(\frac{S}{\pi b_w} \right)^2 D_{3,1} - \frac{3}{2} \left(\frac{S}{\pi b_w} \right)^4 D_{5,1}$$

$$D_{1,2} = -\frac{\mu_1 \mu_2}{2} + \left(\frac{S}{\pi b_w} \right)^2 D_{3,2} - \frac{3}{2} \left(\frac{S}{\pi b_w} \right)^4 D_{5,2}$$

$$D_{1,3} = -\frac{\mu_2^2}{4} + \left(\frac{S}{\pi b_w} \right)^2 D_{3,3} - \frac{3}{2} \left(\frac{S}{\pi b_w} \right)^4 D_{5,3}$$

Os coeficientes E_j da placa 3 são calculados com as mesmas expressões usadas no cálculo dos D_j , isto é, equações (III.38) a (III.44), com as seguintes substituições:

μ_j por ρ_j

γ_j - Ω_j

β_j τ_j

b_w b_l

A solução homogênea F_{i2h}

Reescreve-se a seguir a forma de F_{i2h} para cada uma das placas

$$F_{12h} = K_1 e^{Gy_1} + K_2 y_1 e^{Gy_1} + K_3 e^{-Gy_1} + K_4 y_1 e^{-Gy_1}$$

$$F_{22h} = K_5 e^{Gy_2} + K_6 y_2 e^{Gy_2} + K_7 e^{-Gy_2} + K_8 y_2 e^{-Gy_2}$$

$$F_{32h} = K_9 e^{Gy_3} + K_{10} y_3 e^{Gy_3} + K_{11} e^{-Gy_3} + K_{12} y_3 e^{-Gy_3}$$

(III.45)

Conforme já mencionado os coeficientes K_1 a K_{12} serão determinados mediante atendimento das condições de contorno em termos de tensões nos bordos das placas e no eixo de simetria do conjunto. As condições de contorno a serem atendidas são:

a) Assume-se que não há tensões normais (σ_y) nas junções das placas.

b) O fluxo cisalhante e a tensão longitudinal (σ_x) nas junções devem ser os mesmos para placas adjacentes.

c) Não há tensão cisalhante no bordo livre do enrijecedor.

d) Não há tensão cisalhante e a variação da tensão longitudinal σ_x com respeito a y_1 é nula no ponto de simetria do conjunto.

Utilizando-se a relação entre as tensões e as funções de tensão F_i dada na equação (II.30), onde F_i tem a forma da equação (III.20), as condições de contorno ficam traduzidas por:

Expressões decorrentes da condição (a)

$$F_{12} = 0 \quad \text{em} \quad y_1 = b_f \quad (\text{III.46a})$$

$$F_{22} = 0 \quad \text{em} \quad y_2 = 0 \quad . \quad (\text{III.46b})$$

$$F_{22} = 0 \quad \text{em} \quad y_2 = b_w \quad (\text{III.46c})$$

$$F_{32} = 0 \quad \text{em} \quad y_3 = 0 \quad (\text{III.46d})$$

Expressões decorrentes da condição (b)

$$F'_{12} = - F'_{22} \quad \text{em} \quad (y_1 = b_f, y_2 = b_w) \quad (\text{III.47a})$$

$$F'_{22} = - F'_{32} \quad \text{em} \quad (y_2 = 0, y_3 = 0) \quad (\text{III.47b})$$

$$F''_{12} = F''_{22} \quad \text{em} \quad (y_1 = b_f, y_2 = b_w) \quad (\text{III.47c})$$

$$F''_{22} = F''_{32} \quad \text{em} \quad (y_2 = 0, y_3 = 0) \quad (\text{III.47d})$$

Expressão decorrente da condição (c)

$$F'_{32} = 0 \quad \text{em} \quad y_3 = b_l \quad (\text{III.48})$$

Expressões decorrentes da condição (d)

$$F'_{12} = 0 \quad \text{em} \quad y_1 = 0 \quad (\text{III.49a})$$

$$F''_{12} = 0 \quad \text{em} \quad y_1 = 0 \quad (\text{III.49b})$$

Substituindo-se a forma da solução F_{i2h} dada nas equações (III.45) e suas derivadas nas expressões (III.46) a (III.49) obtêm-se:

$$e^{Gb_f} (K_1 + K_2 b_f) + e^{-Gb_f} (K_3 + K_4 b_f) + F_{12p} (y_1 = b_f) = 0 \quad (\text{III.50a})$$

$$K_5 + K_7 + F_{22p} (y_2 = 0) = 0 \quad (\text{III.50b})$$

$$e^{Gb_w} (K_5 + K_6 b_w) + e^{-Gb_w} (K_7 + K_8 b_w) + F_{22p} (y_2 = b_w) = 0 \quad (\text{III.50c})$$

$$K_9 + K_{11} + F_{32p} (y_3 = 0) = 0 \quad (\text{III.50d})$$

$$\begin{aligned} K_1 G e^{Gb_f} + K_2 e^{Gb_f} (1 + G b_f) - K_3 G e^{-Gb_f} + K_4 e^{-Gb_f} (1 - G b_f) + \\ + F'_{12p} (y_1 = b_f) = - [K_5 G e^{Gb_w} + K_6 e^{Gb_w} (1 + G b_w) - K_7 G e^{-Gb_w} + \\ + K_8 e^{-Gb_w} (1 - G b_w) + F'_{22p} (y_2 = b_w)] \end{aligned} \quad (\text{III.51a})$$

$$\begin{aligned} K_5 G + K_6 - K_7 G + K_8 + F'_{22p} (y_2 = 0) = - [K_9 G + K_{10} - K_{11} G + K_{12} + \\ + F'_{32p} (y_3 = 0)] \end{aligned} \quad (\text{III.51b})$$

$$\begin{aligned} K_1 G^2 e^{Gb_f} + K_2 G e^{Gb_f} (2 + G b_f) + K_3 G^2 e^{-Gb_f} - K_4 G e^{-Gb_f} (2 - G b_f) + \\ + F''_{12p} (y_1 = b_f) = K_5 G^2 e^{Gb_w} + K_6 G e^{Gb_w} (2 + G b_w) + K_7 G^2 e^{-Gb_w} - \\ - K_8 G e^{-Gb_w} (2 - G b_w) + F''_{22p} (y_2 = b_w) \end{aligned} \quad (\text{III.51c})$$

$$G (K_5 G + 2 K_6 + K_7 G - 2 K_8) + F''_{22p} (y_2 = 0) = G (K_9 G + 2 K_{10} + K_{11} G - 2 K_{12}) + F''_{32p} (y_3 = 0) \quad (\text{III.51d})$$

$$K_9 G e^{Gb_1} + K_{10} e^{Gb_1} (1 + G b_1) - K_{11} G e^{-Gb_1} + K_{12} e^{-Gb_1} (1 - G b_1) + F'_{32p} (y_3 = b_1) = 0 \quad (\text{III.52})$$

$$K_1 G + K_2 - K_3 G + K_4 + F'_{12p} (y_1 = 0) = 0 \quad (\text{III.53a})$$

$$G^2 (K_1 G + 3 K_2 - K_3 G + 3 K_4) + F'''_{12p} (y_1 = 0) = 0 \quad (\text{III.53b})$$

Pode-se agora escrever

K_1 , K_2 e K_3 em função de K_4

K_5 e K_7 em função de K_6 e K_8

K_9 , K_{10} e K_{11} em função de K_{12}

$$K_1 = f_1 + g_1 K_4 \quad (\text{III.54})$$

onde

$$f_1 = - F_{12p} (y_1 = b_f) - \frac{e^{-Gb_f}}{1 + e^{-2Gb_f}}$$

$$g_1 = b_f \frac{(1 - e^{-2Gb_f})}{(1 + e^{-2Gb_f})}$$

$$K_2 = f_2 + g_2 K_4 \quad (\text{III.55})$$

onde

$$f_2 = 0$$

$$g_2 = -1$$

$$K_3 = f_3 + g_3 K_4 \quad (\text{III.56})$$

onde

$$f_3 = f_1$$

$$g_3 = g_1$$

$$K_5 = f_5 + g_5 K_6 + h_5 K_8 \quad (\text{III.57})$$

$$K_7 = f_7 + g_7 K_6 + h_7 K_8 \quad (\text{III.58})$$

onde

$$g_7 = - \frac{b_w}{e^{-Gb_w} - 1} \quad e \quad g_5 = -g_7$$

$$h_7 = - \frac{e^{-Gb_w} b_w}{(e^{-Gb_w} - e^{Gb_w})} \quad e \quad h_5 = -h_7$$

$$f_7 = \frac{F_{22p}(y_2 = 0)}{(e^{-2Gb_w} - 1)} - \frac{F_{22p}(y_2 = b_w)}{(e^{-Gb_w} - e^{Gb_w})} \quad e \quad f_5 = -f_7 - F_{22p}(y_2 = 0)$$

$$K_{11} = f_{11} + g_{11} K_{12} \quad (\text{III.59})$$

onde

$$f_{11} = \frac{F_{32p}(y_3 = 0)}{R} - F_{32p}(y_3 = b_1) \frac{(1 + G b_1)}{R e^{Gb_1}} +$$

$$+ F'_{32p}(y_3 = b_1) \frac{b_1}{e^{Gb_1} R}$$

$$g_{11} = - \frac{2 G b_1^2 e^{-2Gb_1}}{R}$$

$$R = -1 + e^{-2Gb_1} + 2 G b_1 e^{-2Gb_1}$$

$$K_{10} = f_{10} + g_{10} K_{12} \quad (\text{III.60})$$

onde

$$f_{10} = \frac{F'_{32p}(y_3 = b_1)}{e^{Gb_1} (1 + G b_1)} \left(-1 + G b_1 \frac{(e^{-Gb_1} + e^{Gb_1})}{R} \right) +$$

$$+ F_{32p}(y_3 = 0) \frac{G}{(1 + G b_1)} \left(e^{-2Gb_1} + \frac{(e^{-Gb_1} + e^{Gb_1})}{R} \right) -$$

$$- F_{32p}(y_3 = b_1) \frac{G}{e^{Gb_1}} \frac{(e^{-Gb_1} + e^{Gb_1})}{R}$$

$$g_{10} = - \frac{e^{-2Gb_1}}{(1 + G b_1)} \left(1 - G b_1 + 2 (G b_1)^2 \frac{(e^{-Gb_1} + e^{Gb_1})}{R} \right)$$

$$K_9 = f_9 + g_9 K_{12} \quad (\text{III.61})$$

onde

$$f_9 = -F_{32p}(y_3 = 0) - f_{11}$$

$$g_9 = -g_{11}$$

Resulta um sistema 4x4:

de (III.51c)

$$L_{11} K_4 + L_{12} K_6 + L_{13} K_8 + L_{14} K_{12} = L_{10} \quad (\text{III.62})$$

onde

$$L_{11} = G^2 e^{Gb_f} g_1 + G e^{Gb_f} (2 + G b_f) g_2 + G^2 e^{-Gb_f} g_3 - \\ - G e^{-Gb_f} (2 - G b_f)$$

$$L_{12} = -G^2 e^{Gb_w} g_5 - G e^{Gb_w} (2 + G b_w) - g_7 G^2 e^{-Gb_w}$$

$$L_{13} = -G^2 e^{Gb_w} h_5 - G^2 e^{-Gb_w} h_7 + G e^{-Gb_w} (2 - G b_w)$$

$$L_{14} = 0$$

$$L_{10} = -F''_{12p}(y_1 = b_f) + F''_{22p}(y_2 = b_w) - f_1 G^2 e^{Gb_f} - \\ - f_2 G e^{Gb_f} (2 + G b_f) - f_3 G^2 e^{-Gb_f} + f_5 G^2 e^{Gb_w} + \\ + f_7 G^2 e^{-Gb_w}$$

de (III.51a)

$$L_{21} K_4 + L_{22} K_6 + L_{23} K_8 + L_{24} K_{12} = L_{20} \quad (\text{III.63})$$

onde

$$L_{21} = g_1 G e^{Gb_f} + g_2 e^{Gb_f} (1 + G b_f) - g_3 G e^{-Gb_f} + e^{-Gb_f} (1 - G b_f)$$

$$L_{22} = g_5 G e^{Gb_w} + e^{Gb_w} (1 + G b_w) - g_7 G e^{-Gb_w}$$

$$L_{23} = h_5 G e^{Gb_w} - h_7 G e^{-Gb_w} + e^{-Gb_w} (1 - G b_w)$$

$$L_{24} = 0$$

$$\begin{aligned} L_{20} = & - F'_{12p} (y_1 = b_f) - F'_{22p} (y_2 = b_w) - f_1 G e^{Gb_f} - \\ & - f_2 e^{Gb_f} (1 + G b_f) + f_3 G e^{-Gb_f} - f_5 G e^{Gb_w} + f_7 G e^{-Gb_w} \end{aligned}$$

de (III.51d)

$$L_{31} K_4 + L_{32} K_6 + L_{33} K_8 + L_{34} K_{12} = L_{30} \quad (\text{III.64})$$

onde

$$L_{31} = 0$$

$$L_{32} = 2 G$$

$$L_{33} = - 2 G$$

$$L_{34} = - 2 G g_{10} + 2 G$$

$$L_{30} = - F_{22p}'' (y_2 = 0) + F_{32p}'' (y_3 = 0) - f_5 G^2 - f_7 G^2 + f_9 G^2 + \\ + f_{11} G^2 + 2 G f_{10}$$

de (III.51b)

$$L_{41} K_4 + L_{42} K_6 + L_{43} K_8 + L_{44} K_{12} = L_{40} \quad (\text{III.65})$$

onde

$$L_{41} = 0$$

$$L_{42} = G g_5 - G g_7 + 1$$

$$L_{43} = G h_5 - G h_7 + 1$$

$$L_{44} = G g_9 + g_{10} - G g_{11} + 1$$

$$L_{40} = - F_{22p}' (y_2 = 0) - F_{32p}' (y_3 = 0) + G (- f_5 + f_7 - f_9 + f_{11}) - \\ - f_{10}$$

Os coeficientes L_{10} , L_{20} , L_{30} e L_{40} podem ser escritos na forma

$$L_{i0} = A_1^2 L_{i0,1} + A_1 A_2 L_{i0,2} + A_2^2 L_{i0,3}$$

onde $L_{i0,j}$ são funções dos coeficientes $C_{k,j}$, $D_{k,j}$ e $E_{k,j}$ dados pelas equações (III.32) a (III.44).

Resolvendo o sistema de equações (III.62 a III.65) encontra-se:

$$K_{12} = A_1^2 K_{12,1} + A_1 A_2 K_{12,2} + A_2^2 K_{12,3} \quad (\text{III.66})$$

onde

$$K_{12,j} = \frac{1}{S_1} [(L_{32} S_2 + L_{33}) (L_{40,j} - L_{42} S_{3,j}) - (L_{43} + S_2 L_{42}) (L_{30,j} - L_{32} S_{3,j})]$$

e

$$S_1 = L_{44} (L_{32} S_2 + L_{33}) - L_{34} (L_{43} + S_2 L_{42})$$

$$S_2 = \frac{L_{13} L_{21} - L_{23} L_{11}}{L_{22} L_{11} - L_{12} L_{21}}$$

$$S_{3,j} = \frac{L_{20,j} L_{11} - L_{10,j} L_{21}}{L_{22} L_{11} - L_{12} L_{21}} \quad \text{para } j = 1, 3$$

$$K_8 = A_1^2 K_{8,1} + A_1 A_2 K_{8,2} + A_2^2 K_{8,3} \quad (\text{III.67})$$

onde

$$K_{8,j} = \frac{1}{S_4} [L_{40,j} - L_{44} K_{12,j} - L_{42} S_{3,j}]$$

$$S_4 = L_{43} + S_2 L_{42}$$

$$K_6 = A_1^2 K_{6,1} + A_1 A_2 K_{6,2} + A_2^2 K_{6,3} \quad (\text{III.68})$$

onde

$$K_{6,j} = S_{3,j} + S_2 K_{8,j}$$

$$K_4 = A_1^2 K_{4,1} + A_1 A_2 K_{4,2} + A_2^2 K_{4,3} \quad (\text{III.69})$$

onde

$$K_{4,j} = (L_{20,j} - L_{22} K_{6,j} - L_{23} K_{8,j})/L_{21}$$

Pode-se finalmente escrever

$$F_{i2} = F_{i2p} + F_{i2h} = A_1^2 F_{i2,1} + A_1 A_2 F_{i2,2} + A_2^2 F_{i2,3} \quad (\text{III.70})$$

onde i está associado a cada placa e

$$\begin{aligned} F_{12,j} = & \sum_{k=1}^{11,2} C_{k,j} y_1^{k-1} + K_{1,j} e^{Gy_1} + K_{2,j} y_1 e^{Gy_1} + K_{3,j} e^{-Gy_1} + \\ & + K_{4,j} y_1 e^{-Gy_1} \end{aligned} \quad (\text{III.71})$$

$$\begin{aligned} F_{22,j} = & \sum_{k=1}^7 D_{k,j} y_2^{k-1} + K_{5,j} e^{Gy_2} + K_{6,j} y_2 e^{Gy_2} + K_{7,j} e^{-Gy_2} + \\ & + K_{8,j} y_2 e^{-Gy_2} \end{aligned} \quad (\text{III.72})$$

$$\begin{aligned} F_{32,j} = & \sum_{k=1}^7 E_{k,j} y_3^{k-1} + K_{9,j} e^{Gy_3} + K_{10,j} y_3 e^{Gy_3} + \\ & + K_{11,j} e^{-Gy_3} + K_{12,j} y_3 e^{-Gy_3} \end{aligned} \quad (\text{III.73})$$

para $j = 1, 3$

CAPÍTULO IV

ANÁLISE LINEAR - CÁLCULO DA CARGA CRÍTICA

IV.1. O CÁLCULO DA CARGA CRÍTICA

A condição (II.8) constitui o critério para o cálculo da carga crítica e corresponde à linearização do problema de estabilidade uma vez que envolve a primeira variação da forma quadrática, V_2 , do incremento de energia potencial total. Para o cálculo da carga crítica local de uma coluna curta com seção U enrijecida avalia-se, inicialmente, a parcela quadrática da variação de energia potencial expressa pela equação (II.34) para o conjunto das três placas associadas. Em seguida aplica-se o critério de Trefftz, dado pela equação (II.8), o que fornece um problema de auto-valor do qual se obtém a carga crítica e o modo crítico local.

A parcela quadrática da variação de energia potencial expressa pela equação (II.34) correspondente à metade da seção transversal simétrica mostrada na Figura (III.2) de uma coluna de comprimento S tem a forma:

$$V_2 = \sum_{i=1}^3 \left[\int_0^S \int_0^{b_i} \frac{1}{2} N_{xi}^F w_{i,x}^2 dy_i dx + U_{fi} \right] \quad (IV.1)$$

onde

$i = 1$ para o flange

$i = 2$ para a alma

$i = 3$ para o enrijecedor

U_{fi} representa a energia de flexão de cada placa

$b_1 = b_f$, $b_2 = b_w$ e $b_3 = b_l$.

Na equação (II.34) os termos envolvendo derivadas das funções de tensão são quárticos com A_1 e A_2 pois sabe-se do Capítulo III que F_i e suas derivadas são funções quadráticas destes coeficientes.

Substituindo-se os valores de N_{xi}^F dados pelas equações (III.25) e a expressão de U_{fi} , equação (III.15c), obtêm-se

$$\begin{aligned} V_2 = \sum_{i=1}^3 \left\{ \frac{D}{2} \int_0^S \int_0^{b_i} [w_{i,xx}^2 + w_{i,yy}^2]^2 - 2(1-\nu) [w_{i,xx} w_{i,yy} - \right. \\ \left. - w_{i,xy}^2] dy_i dx \right\} - \frac{\sigma^* t}{2} \int_0^S \int_0^{b_f} w_{1,x}^2 dy_1 dx + \int_0^S \int_0^{b_w} \left((1-\alpha) + \right. \\ \left. + \frac{\alpha}{b_w} y_2 \right) w_{2,x}^2 dy_2 dx + \int_0^S \int_0^{b_l} (1-\alpha) w_{3,x}^2 dy_3 dx \end{aligned} \quad (IV.2)$$

A expressão do parâmetro α para um certo valor de excentricidade de carga, e , antes da flambagem local, \bar{e} determinado

pela Teoria Elástica Linear como se segue (ver Figura III.1):

Tensão no enrijecedor

$$\sigma^* (1 - \alpha) = \frac{P}{A} - \frac{P_e}{I} d$$

Tensão no flange

$$\sigma^* = \frac{P}{A} + \frac{P_e}{I} (b_w - d)$$

onde

A = área da seção

I = momento de inércia de seção

Então

$$\alpha = \frac{e b_w A}{I + e A (b_w - d)} \quad (\text{IV.3})$$

Substituindo-se agora a expressão de w_i dada em (III.1) e suas derivadas na equação (IV.2) e integrando-se ao longo de x chega-se à seguinte expressão

$$\begin{aligned}
V_2 = & \sum_{i=1}^3 \frac{D}{2} \frac{S}{2} \int_0^{b_i} \left[\left(\frac{\pi}{S} \right)^4 Y_i^2 - 2 \left(\frac{\pi}{S} \right)^2 Y_i Y_i'' + Y_i'^2 + \right. \\
& \left. + 2 (1 - \nu) \left(\frac{\pi}{S} \right)^2 (Y_i Y_i'' + Y_i'^2) \right] dy_i \Bigg\} - \\
& - \frac{\sigma^* t}{4} \left(\frac{\pi}{S} \right)^2 \left[\int_0^{b_f} Y_1^2 dy_1 + \int_0^{b_w} \left(1 - \alpha + \frac{\alpha}{b_w} y_2 \right) Y_2^2 dy_2 + \right. \\
& \left. + \int_0^{b_l} (1 - \alpha) Y_3^2 dy_3 \right]
\end{aligned} \tag{IV.4}$$

As integrais em Y_i e suas derivadas têm a forma:

$$\int_0^{b_i} Y_i^2 dy_i = A_1^2 J_{i,1} + 2 A_1 A_2 J_{i,2} + A_2^2 J_{i,3} \tag{IV.5}$$

$$\int_0^{b_i} Y_i'^2 dy_i = A_1^2 P_{i,1} + 2 A_1 A_2 P_{i,2} + A_2^2 P_{i,3} \tag{IV.6}$$

$$\int_0^{b_i} Y_i Y_i'' dy_i = A_1^2 I_{i,1} + 2 A_1 A_2 I_{i,2} + A_2^2 I_{i,3} \tag{IV.7}$$

$$\int_0^{b_i} Y_i'^2 dy_i = A_1^2 H_{i,1} + 2 A_1 A_2 H_{i,2} + A_2^2 H_{i,3} \tag{IV.8}$$

$$\int_0^{b_w} Y_2^2 y_2 dy_2 = A_1^2 N_{2,1} + 2 A_1 A_2 N_{2,2} + A_2^2 N_{2,3} \tag{IV.9}$$

onde os coeficientes $J_{i,j}$, $P_{i,j}$, $I_{i,j}$, $H_{i,j}$ e $N_{2,j}$ são apresentados no Apêndice A.

A expressão de V_2 pode ser escrita separando-se os coeficientes de A_1^2 , A_2^2 e $A_1 A_2$ como se segue:

$$V_2 = A_1^2 V_{2,1} + 2 A_1 A_2 V_{2,2} + A_2^2 V_{2,3} \quad (\text{IV.10})$$

onde

$$\begin{aligned} V_{2,j} = & \sum_{i=1}^3 \frac{D}{2} \frac{S}{2} \left[\left(\frac{\pi}{S} \right)^4 J_{i,j} - 2 \left(\frac{\pi}{S} \right)^2 I_{i,j} + P_{i,j} + \right. \\ & \left. + 2 (1 - \nu) \left(\frac{\pi}{S} \right)^2 (I_{i,j} + H_{i,j}) \right] - \\ & - \sigma^* \frac{t}{4} \left(\frac{\pi}{S} \right)^2 [J_{1,j} + (1 - \alpha) J_{2,j} + \frac{\alpha}{b_w} N_{2,j} + (1 - \alpha) J_{3,j}] \end{aligned} \quad (\text{IV.11})$$

A aplicação do critério de Trefftz fornece as duas equações linearizadas de equilíbrio crítico:

$$A_1 V_{2,1} + A_2 V_{2,2} = 0$$

$$A_1 V_{2,2} + A_2 V_{2,3} = 0$$

(IV.12)

As equações (IV.12) constituem um problema de autovalor do tipo:

$$[K_E - \lambda K_G] \underline{U} = \underline{0} \quad (\text{IV.13})$$

onde

$$U = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}$$

$$K_E(k, 1) = \sum_{i=1}^3 D \frac{S}{4} \left[\left(\frac{\pi}{S} \right)^4 J_{i,j} - 2 \left(\frac{\pi}{S} \right)^2 I_{i,j} + P_{i,j} + \right. \\ \left. + 2(1 - \nu) \left(\frac{\pi}{S} \right)^2 (I_{i,j} + H_{i,j}) \right]$$

$$K_G(k, 1) = \frac{t}{4} \left(\frac{\pi}{S} \right)^2 [J_{1,j} + (1 - \alpha) J_{2,j} + \frac{\alpha}{b_w} N_{2,j} + (1 - \alpha) J_{3,j}]$$

e λ é a tensão crítica.

Na avaliação de K_E e K_G

$j = 1$ para $k = 1 = 1$

$j = 2$ para $k \neq 1$

$j = 3$ para $k = 1 = 2$

A resolução do problema para solução não trivial requer que

$$| K_E - \lambda K_G | = 0 \quad (IV.14)$$

Assim obtêm-se uma equação quadrática em λ com a qual se calcula a tensão crítica. Além disso obtêm-se o autovetor $[1 \ A_0]$ onde

$$A_0 = - \frac{[K_E (1,1) - \lambda K_G (1,1)]}{[K_E (1,2) - \lambda K_G (1,2)]} \quad (\text{IV.15})$$

Então o modo crítico tem a forma

$$w_{icr} = Y_{icr} \cos \frac{\pi x}{S} \quad (\text{IV.16})$$

onde

$$Y_{icr} = Y_{i1} + A_0 Y_{i2}$$

O comprimento de meia onda S é uma incôgnita do problema já que a tensão crítica σ_{cr} está associada a ele. A determinação de S associado ao menor autovalor é feita iterativamente. Para isto calculam-se os autovalores associados a três comprimentos de meia onda, por exemplo, $S = 2 b_f$, $S = 1,8 b_f$ e $S = 1,6 b_f$, e por estes três pares de valores interpola-se uma parábola como a da Figura (IV.1), obtendo-se assim o valor mínimo S_{min} . Para este S_{min} resolve-se novamente o problema de autovalor determinando-se a tensão crítica local, σ_{cr} . Este processo pode ser repetido, utilizando-se sempre o último par crítico calculado, até que seja satisfeita a precisão desejada.

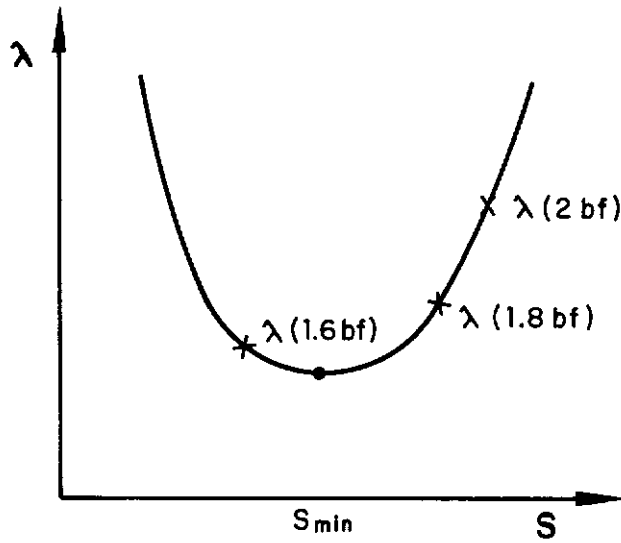


Figura IV.1 - INTERPOLAÇÃO PARABÓLICA UTILIZADA NA DETERMINAÇÃO DO COMPRIMENTO DE MEIA ONDA S ASSOCIADO AO MENOR AUTOVALOR.

IV.2. APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS

Os resultados obtidos no cálculo da tensão crítica pelo método do item anterior são apresentados a seguir sob a forma de gráficos e tabelas. Foi feito um estudo paramétrico envolvendo a relação entre larguras das placas, a tensão crítica σ_{cr} e o parâmetro de excentricidade α .

Variação dos parâmetros geométricos

A Figura (IV.2) mostra, em linha cheia, a variação da tensão crítica para diversas configurações geométricas da seção enrijecida, obtida com as equações (IV.12). A curva tracejada

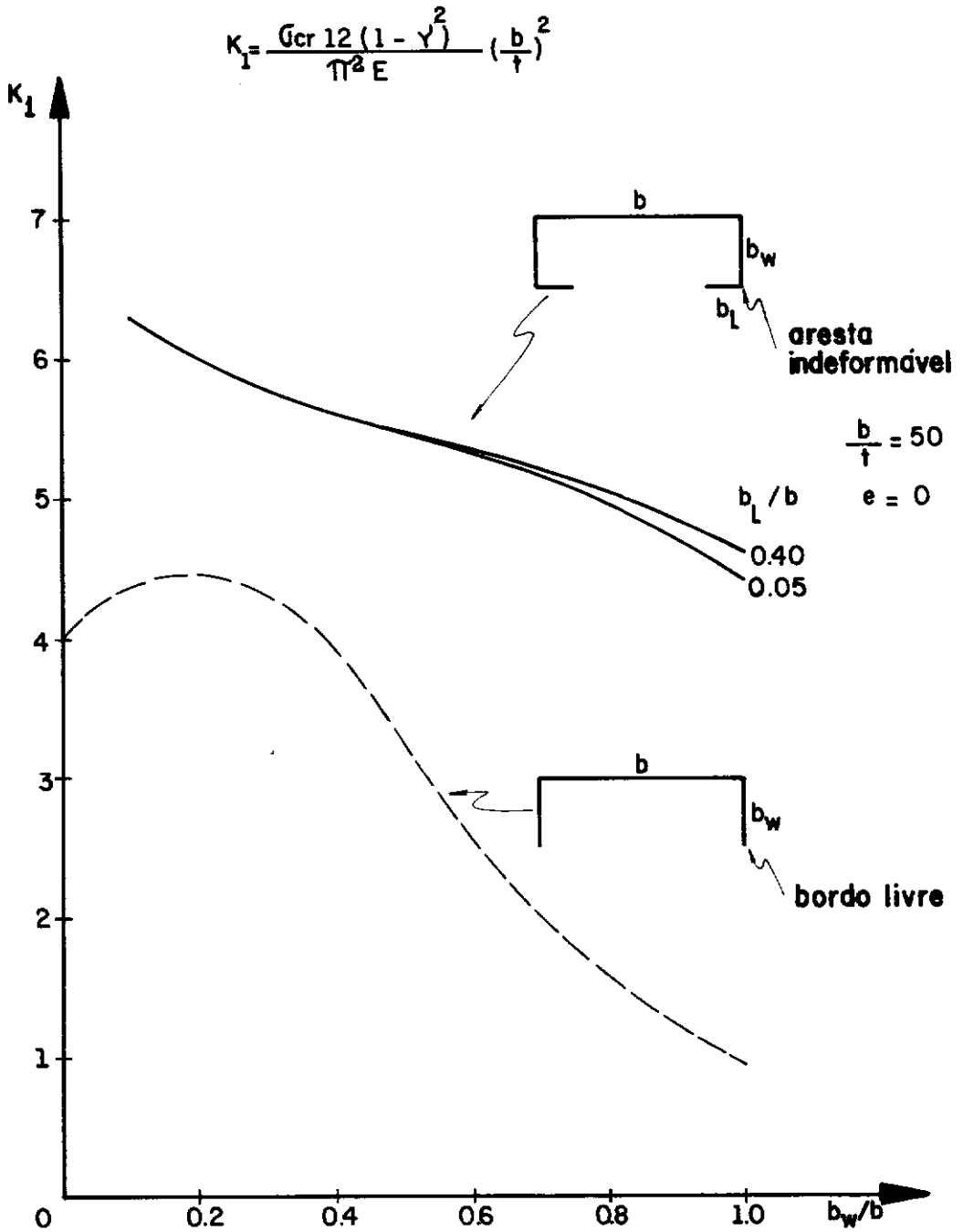


Figura IV.2- TENSÃO CRÍTICA PARA DIVERSAS CONFIGURAÇÕES GEOMÉTRICAS DE COLUNAS COM CARREGAMENTO CENTRADO.

também apresentada nesta figura [15] se refere à seção U não enrijecida. Pode-se observar, comparando-se os resultados, o ganho de eficiência da seção enrijecida em relação à não enrijecida. Quanto à seção enrijecida, vê-se que há um contínuo decréscimo da tensão crítica com o aumento da largura da alma, sendo mais acentuado no caso de $b_w/b > 0,6$. Devido a isto utilizam-se na prática seções com pequenas e médias larguras de alma em relação ao flange.

A variação da largura do enrijecedor, b_1 , praticamente não altera o valor da tensão crítica. Este resultado decorre da hipótese feita para o modo de flambagem no qual a aresta de junção alma-enrijecedor permanece reta após a flambagem local (ver a seção III.2). Na verdade, isto ocorre sempre que a rigidez a flexão do enrijecedor é suficiente para conter os deslocamentos laterais da alma nesta aresta, como ilustrado na Figura (IV.3a). Estes são os casos práticos correntes.

No caso de o enrijecedor não ser eficiente neste sentido a seção flamba no modo da Figura (IV.3b).

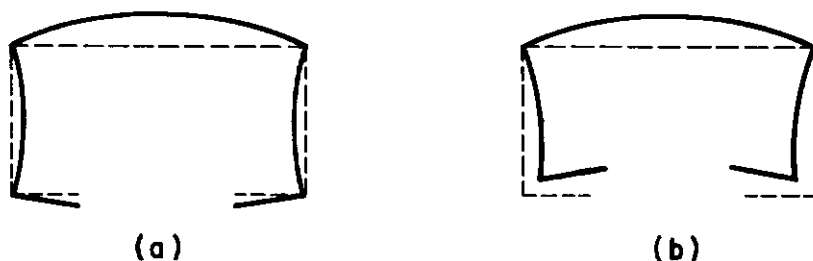
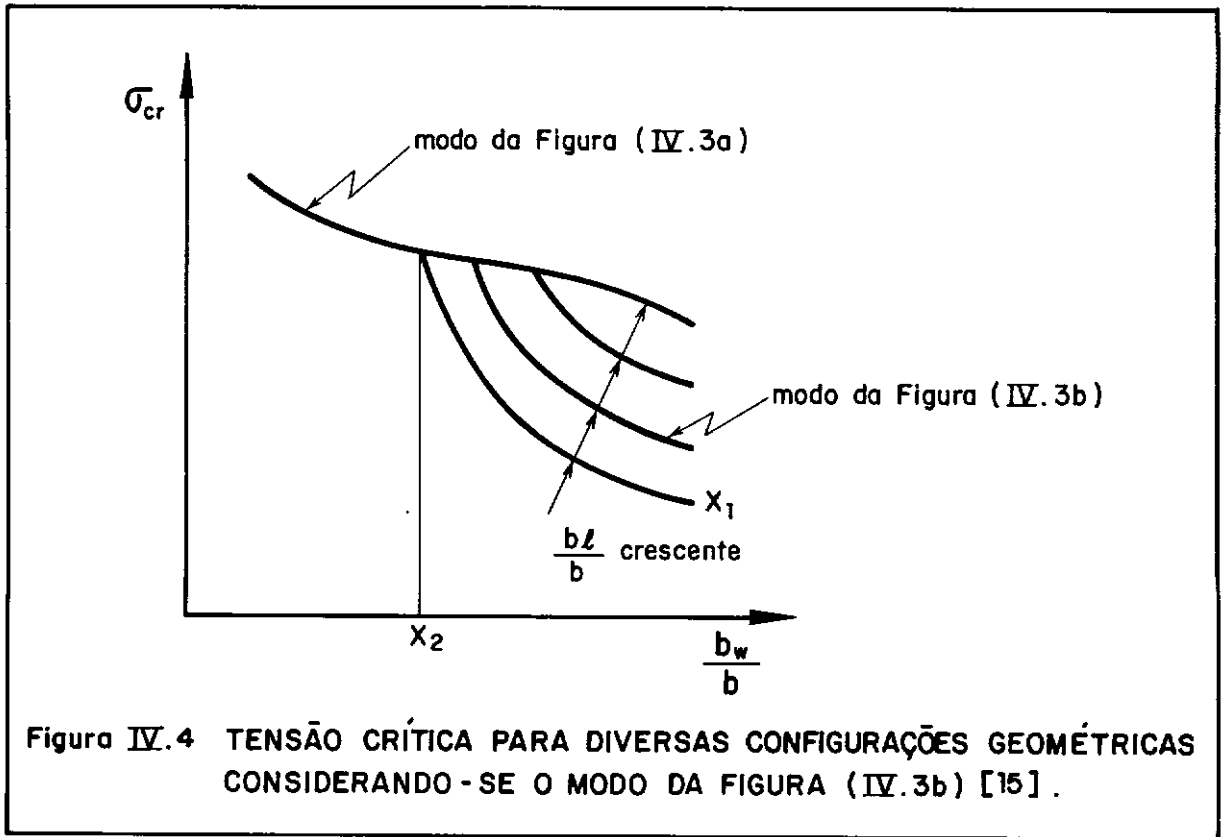


Figura IV.3 - MODOS DE FLAMBAGEM LOCAL : (a) ENRIJECADOR EFICIENTE FLAMBANDO COMO PLACA - ARESTA DE JUNÇÃO PERMANECE RETA ; (b) ENRIJECADOR INEFICIENTE FLAMBANDO COMO COLUNA - ARESTA DE JUNÇÃO NÃO PERMANECE RETA .

A consideração do modo de flambagem ilustrado na Figura (IV.3b) conduziria a valores de tensão crítica menores para relações b_1/b pequenas, fornecendo de acordo com BULSON e ALLEN [15] um gráfico do tipo mostrado na Figura (IV.4). Observando-se este gráfico pode-se obter, para uma seção com determinada relação b_w/b , a largura mínima do enrijecedor, b_1 , para que a aresta permaneça retilínea. Por exemplo, uma seção com b_w/b igual a X_2 precisa de um enrijecedor com largura maior que $X_1 b$.



TIMOSHENKO e GERE [16] apresentaram o cálculo da tensão crítica de uma placa isolada sob compressão uniaxial em seu próprio plano com bordos apoiados sobre vigas elásticas.

Com esta análise simplificada pode-se obter as dimensões necessárias às vigas de bordo e conseqüentemente aos enrijecedores para que os bordos permaneçam retilíneos assim como na hipótese feita nesta análise.

Baseada numa análise similar à descrita anteriormente, a norma AISI [24] fornece prescrições acerca da mínima rigidez necessária a um enrijecedor para que ele confira apoio a uma placa adjacente. Segundo a AISI, seção 2.3.2.1, uma placa comprimida pode ser considerada um elemento enrijecido se possui ao longo de cada bordo paralelo à direção de aplicação da carga um enrijecedor com inércia mínima em torno do eixo paralelo à placa passando pelo seu centroide igual a

$$I_{\min} = 1,83 t^4 \sqrt{(b_w/t)^2 - 27560/F_y} > 9,2 t^4 \quad (\text{IV.17})$$

onde F_y é a tensão de escoamento do aço em MPa.

A Tabela (IV.1) mostra os valores mínimos para larguras de enrijecedor de uma seção U enrijecida de acordo com as prescrições da norma AISI.

Tabela IV.1 - Valores mínimos de b_l de acordo com as prescrições da norma AISI para uma seção U enrijecida com $b/t = 125$ e feita de aço com $F_y = 227 \text{ MPa}$ ($23,2 \text{ kgf/cm}^2$)

$b_w(\text{mm})$	b_w/t	$b_{l\min}(\text{mm})$	$b_{l\min}/b$
20	25	6,3	0,06
40	50	8,2	0,08
60	75	9,4	0,09
80	100	10,4	0,10

Na análise não-linear apresentada mais adiante neste trabalho todas as seções estudadas estarão dentro do campo de validade da hipótese sobre o modo de flambagem da Figura (IV.3.a). Muitos dos resultados apresentados têm como exemplos seções com razão $b/t = 125$, respeitando os limites dados na Tabela (IV.1).

Variação do parâmetro de excentricidade α

A Figura (IV.5) ilustra a variação da tensão crítica, σ_{crit} , tomada como a tensão na junção flange-alma, para diferentes parâmetros de excentricidade e diversas configurações geométricas. Observa-se que o valor desta tensão crítica só é afetado pela excentricidade nas seções cuja razão b_w/b é maior que 0,4. A tensão crítica de seções com pequenas larguras de alma ($b_w/b < 0,4$) é determinada pelo flange por ser este a placa mais esbelta. Sendo o flange carregado uniformemente este resultado não é surpreendente, já que a excentricidade não altera o valor da tensão crítica do mesmo tomado isoladamente. Nas seções com $b_w/b > 0,4$ uma excentricidade positiva provoca um aumento desta tensão crítica em relação ao caso de $\alpha = 0$. Por outro lado, uma excentricidade negativa provoca um decréscimo desta tensão crítica.

Como se pode observar no diagrama de tensões da Figura (IV.5), a tensão crítica σ_{cr} atuante na junção flange-alma não é, no caso de α negativo, a maior tensão atuante na seção. Vê-se, assim, que esta definição de tensão crítica não é adequada. Entretanto torna-se difícil definir tensão crítica de maneira satisfatória já que a tensão máxima ocorre em pontos diferentes da seção dependendo do sinal de α . Para contornar esta dificuldade estuda-se a influência da variação do parâmetro α na carga

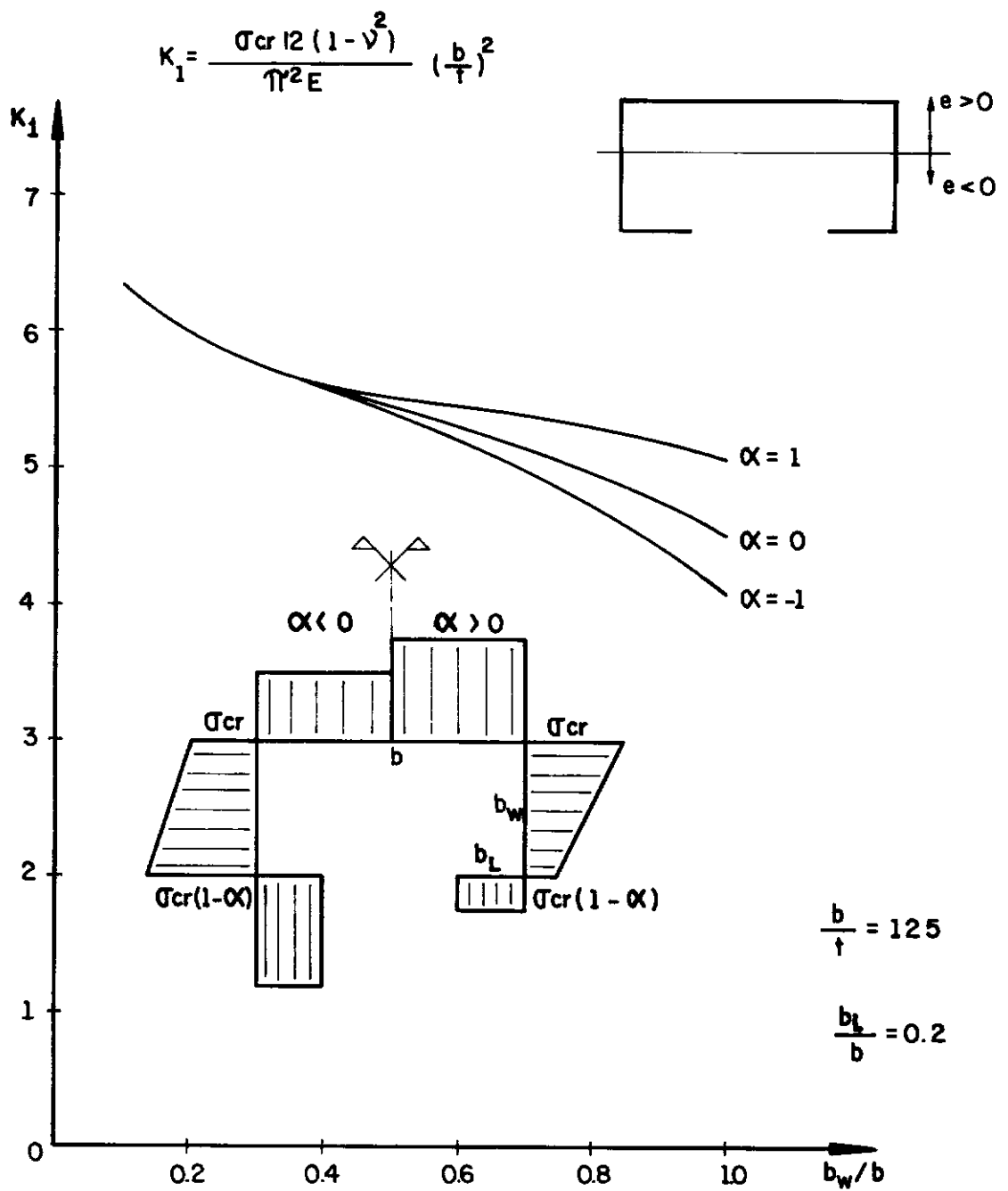


Figura IV. 5 - TENSÃO CRÍTICA PARA DIFERENTES PARÂMETROS DE EXCENTRICIDADE.

crítica local P_{cr} , como será apresentado mais adiante.

A Figura (IV.6) apresenta a variação b_w/b da tensão máxima, σ_{max} , atuante na seção para três valores de α . Para $\alpha = 0$ e $\alpha = 1$ tem-se σ_{max} igual a σ_{cr} e, para $\alpha = -1$, σ_{max} é o dobro de σ_{cr} conforme o diagrama de tensões da Figura (IV.5).

A seguir examina-se a variação da carga crítica com o parâmetro de excentricidade α .

Integrando as funções de tensões ao longo da seção obtêm-se

$$P_{cr} = \sigma_{cr} 2 t [b_f + b_w (1 - \alpha) + b_w \frac{\alpha}{2} + b_l (1 - \alpha)] \quad (IV.18)$$

Tomando-se por exemplo $b_f = 50$ mm, $b_l = 20$ mm e $t = 0,8$ mm constroi-se o gráfico da Figura (IV.7). Observando-se este gráfico conclui-se que um carregamento excêntrico na direção do flange (α positivo) induz uma carga crítica menor do que um carregamento centrado. Por outro lado uma coluna solicitada excêntricamente na direção do enrijecedor (α negativo) tem sua carga crítica local maior do que quando solicitada uniformemente. O que esta figura mostra de forma mais clara é a queda na eficiência da seção para relações b_w/b maiores que 0,6, ilustrada pelo patamar de carga que se vê nesta faixa.

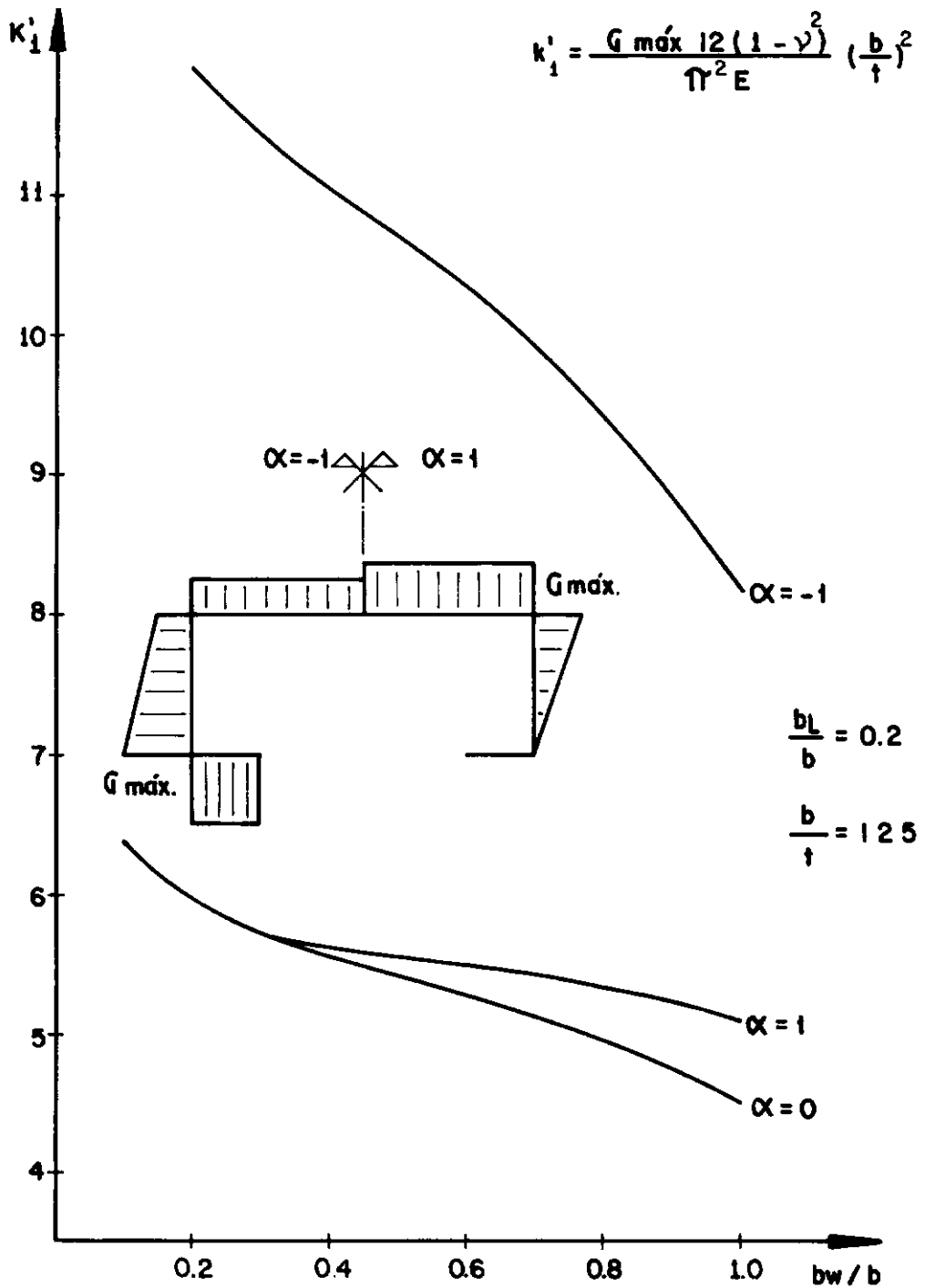


Figura IV.6 - TENSÃO MÁXIMA PARA DIFERENTES PARÂMETROS DE EXCENTRICIDADE.

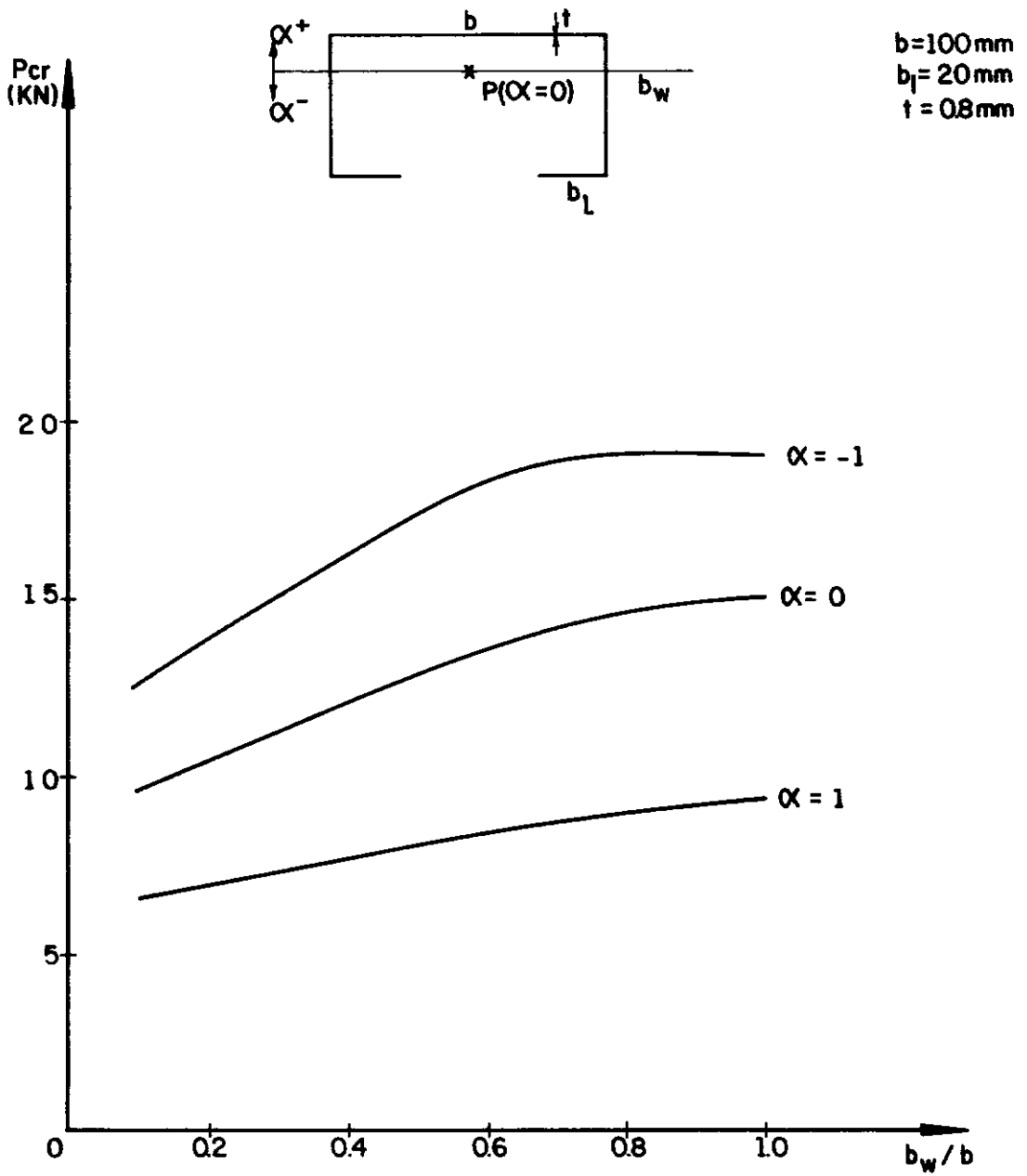


Figura IV.7 - CARGA CRÍTICA PARA DIFERENTES
 PARÂMETROS DE EXCENTRICIDADE.

IV.3. COMPARAÇÃO DOS RESULTADOS

Os resultados apresentados no item (IV.2) são a seguir comparados com os obtidos pelo método das faixas finitas descrito por PRZEMIENIECKI [17] para cálculo de cargas críticas locais, sendo para isto utilizado um programa anteriormente implementado [18].

No método dos elementos de faixas a coluna é subdividida em elementos de comprimento S como ilustra a Figura (IV.8). Adota-se a hipótese de que a aresta de ligação entre elementos permanece reta analogamente à hipótese feita neste trabalho. Isto possibilita a consideração de apenas dois graus de liberdade: de flexões e rotações da aresta. As funções deslocamento nestes elementos são descritas por uma variação senoidal na direção longitudinal associada a uma variação cúbica transversal.

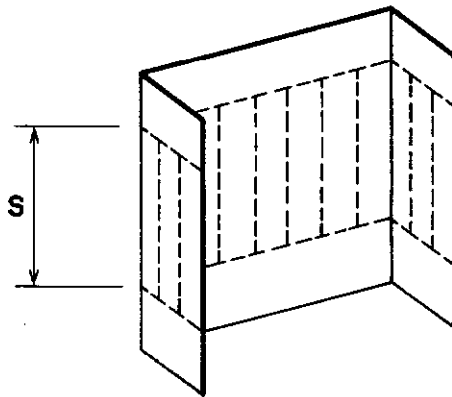


Figura IV.8 - DISCRETIZAÇÃO DA SEÇÃO NO MÉTODO DAS FAIXAS FINITAS.

O cálculo da tensão crítica é feito através da solução do problema de autovalor decorrente da equação de equilíbrio crítico

$$(\underline{K}_E + \lambda \underline{K}_G) \underline{U} = \underline{0}$$

onde \underline{K}_E e \underline{K}_G são as matrizes de rigidez elástica e geométrica da estrutura e \underline{U} o vetor de deslocamentos nodais. Como as matrizes \underline{K}_E e \underline{K}_G dependem do comprimento da faixa S , adota-se o mesmo procedimento descrito no final da seção (IV.1) para o cálculo do valor de S associado ao menor autovalor λ .

A hipótese básica sobre o modo de flambagem (arestas retilíneas) adotada no método das faixas finitas é a mesma do método semi-analítico usado neste trabalho. Por outro lado as funções deslocamento diferem em aproximações polinomiais no sentido transversal das placas.

No método semi-analítico a discretização consta de um elemento para cada placa enquanto que no método das faixas finitas embora não restrito a uma só forma de seção, são necessários mais elementos. Isto se deve ao fato de que as funções deslocamento utilizadas no método semi-analítico são mais refinadas (polinômios de mais alto grau), além do uso do campo de tensões. É importante ressaltar ainda que o método das faixas finitas apresenta problemas numéricos, o que não ocorre com o método semi-analítico.

A Tabela (IV.2) apresenta os valores da tensão crítica associadas ao mesmo comprimento de meia onda S obtidos com os dois métodos.

Tabela IV.2 - Comparação de resultados. Valor da tensão crítica para seções com $b_1/b = 0,2$ e $b/t = 125$

b_w/b	Tensão crítica (MPa) Método Semi-Analítico	Tensão crítica (MPa) Método das faixas finitas	
		1 elemento por placa	mais de um elemento por placa (total de elementos)
0,2	72,4	73,6	72,3 (7)
0,4	67,8	68,7	67,7 (7)
0,6	64,8	65,3	64,6 (8)

Os resultados da análise numérica via método das faixas finitas com um elemento por placa são superiores aos do método semi-analítico e se aproximam destes com o acréscimo do número de elementos. Para se obter valores coincidentes nos dois métodos é necessário utilizar no método das faixas finitas mais do dobro de elementos por placa em média.

CAPÍTULO V

ANÁLISE NÃO-LINEAR DO COMPORTAMENTO PÓS-CRÍTICO

V.1. INTRODUÇÃO

No presente capítulo faz-se o estudo do comportamento pós-crítico de uma coluna sujeita a compressão excêntrica. Inicialmente determina-se o equilíbrio local, isto é da seção transversal, através da extremização da variação da energia potencial total utilizando-se o modo crítico. Este procedimento fornece o diagrama de tensões e a deformada da seção. Uma vez conhecida a distribuição de tensões pode-se determinar as resultantes de carga axial e momento interno. O equilíbrio global é posteriormente atendido igualando-se a carga e o momento externos às resultantes internas. Os resultados obtidos através desta análise são apresentados em forma de gráficos e comparados a outros resultados teóricos e experimentais.

V.2. EXTREMIZAÇÃO DA VARIAÇÃO DA ENERGIA POTENCIAL TOTAL: EQUILÍBRIO LOCAL

Seja a coluna da Figura (III.1) submetida a um encurtamento não uniforme caracterizado pelos parâmetros u^* e α . A variação da energia potencial total é dada pela equação (II.34). A substituição, nesta expressão, da forma geral dos deslocamentos transversais

$$w_i = \sum_{j=1}^n w_j Y_{ij} \cos \frac{\pi x}{S}, \quad (V.1)$$

das derivadas das funções de tensão de Airy

$$F_{i,xx}^I = - \frac{4 \pi^2}{S^2} F_{i2} \cos \frac{2 \pi x}{S}$$

$$F_{i,yy}^I = \frac{E \pi^2}{4 S^2} Y_i^2 + F_{i2}'' \cos \frac{2 \pi x}{S}$$

$$F_{i,xy}^I = - F_{i2}' \frac{2 \pi}{S} \sin \frac{2 \pi x}{S}$$

(V.2)

e de N_{xi}^F dados da equação (III.25), fornece, depois da integração segundo x ,

$$\begin{aligned}
\Delta V = \sum_{i=1}^3 2 \left\{ \int_0^{b_i} \frac{t}{2E} \left[\frac{S}{2} - 16 \left(\frac{\pi}{S} \right)^4 F_{i2}^2 - 8 \left(\frac{\pi}{S} \right)^2 F_{i2} F_{i2}'' + \right. \right. \\
\left. \left. + F_{i2}''^2 \right) + \left(\frac{E \pi^2}{4 S^2} \gamma_i^2 \right)^2 S - 2 (1 + \nu) \left(\frac{2 \pi}{S} \right)^2 (F_{i2} F_{i2}'' + F_{i2}'^2) \right] dy_i + \\
\left. + U_{fi} \right\} - E t u^* \left(\frac{\pi}{S} \right)^2 \left[\int_0^{b_f} \gamma_1^2 dy_1 + \int_0^{b_w} \gamma_2^2 (1 - \alpha) dy_2 + \right. \\
\left. + \int_0^{b_w} \frac{\alpha}{b_w} \gamma_2^2 y_2 dy_2 + \int_0^{b_l} \gamma_3^2 (1 - \alpha) dy_3 \right]
\end{aligned} \quad (V.3)$$

O termo $\sum_{i=1}^3 \int_0^{b_i} (F_{2i} F_{2i}'' + F_{2i}'^2) dy_i$ se anula em virtude das condições de contorno, uma vez que é idêntico a $\sum_{i=1}^3 F_{2i} F_{2i}'^2 \Big|_0^{b_i}$.

Para o estudo do comportamento pós-crítico inicial toma-se o modo crítico (vide seção IV.1)

$$w_i = W_1 Y_{cr,i} \cos \frac{\pi x}{S} \quad (V.4)$$

onde

$$Y_{cr,i} = Y_{1i} + A_0 Y_{2i}$$

e W_1 é a magnitude do modo crítico; e as funções de tensão F_{i2} (vide seção III.4)

$$F_{i2} = W_1^2 [F_{i2,1} + A_0 F_{i2,2} + A_0^2 F_{i2,3}] \quad (V.5)$$

A variação da energia potencial total torna-se então

$$\Delta V = W_1^4 \frac{E t \pi^4}{16 S^3} a_4 - W_1^2 \left\{ E t u^* \left(\frac{\pi}{S} \right)^2 [a_1 + \alpha (a_2 + a_1)] - \frac{E t \pi^4}{8 S^3} a_3 \right\} \quad (V.6)$$

onde os coeficientes $a_1 - a_4$ são dados por:

$$a_1 = \sum_{i=1}^3 \int_0^{b_i} y_{cr,i}^2 dy_i \quad (V.7)$$

$$a_2 = \sum_{i=1}^3 \int_0^{b_i} y_{cr,i} \frac{y_2}{b_w} dy_i \quad \text{com } y_2 = 0 \text{ para } i = 3$$

e $y_2 = b_w$ para $i = 1$

(V.8)

$$a_3 = \frac{S^4 t^2}{3 (1 - \nu^2) \pi^4} \int_0^{b_i} \left\{ \left[y_{cr,i}'' - \left(\frac{\pi}{S} \right)^2 y_{cr} \right]^2 + \frac{2 \pi^2}{S^2} (1 - \nu) [y_{cr,i} y_{cr,i}'' + y_{cr,i}'^2] \right\} dy_i \quad (V.9)$$

$$a_4 = \sum_{i=1}^3 \int_0^{b_i} \left[y_{cr,i}^4 + \frac{8 S^2}{E^2 \pi^4} \left(F_{i2}'' - \left(\frac{2 \pi}{S} \right)^2 F_{i2} \right)^2 \right] dy_i \quad (V.10)$$

cuas expressões resultantes das integrações podem ser encontradas no Apêndice B.

A extremização do funcional ΔV da equação (V.6)

$$\frac{\partial \Delta V}{\partial W_1} = 0 \quad (V.11)$$

conduz a

$$W_1^2 = \frac{8 S u^*}{\pi^2 a_4} [a_1 + \alpha (a_2 - a_1)] - \frac{a_3}{a_4} \quad (V.12)$$

para $u^* > u_{cr}^*$.

A distribuição de tensões atuantes numa seção transversal da coluna, para um certo encurtamento u^* e um valor de α é dada por

$$\sigma_{x_i} = \frac{\partial^2 F_i}{\partial y_i^2} = F_{i1}'' + F_{i2}'' \cos \frac{2 \pi x}{S} \quad (V.13)$$

e a deformada de cada placa pode ser obtida com a equação (V.4).

V.3. EQUILÍBRIO GLOBAL DA COLUNA

Na análise apresentada aqui especifica-se o encurtamento a que está submetido o conjunto de placas, isto é admite-se valores para u^* e α , e calcula-se a correspondente carga aplicada bem como os momentos atuantes na seção.

A carga P resultante das tensões externas, é dada pela integração da expressão da tensão axial ao longo da seção. Portanto,

$$\begin{aligned}
 P &= \sum_{i=1}^3 2 t \int_0^{b_i} \left(F''_{i1} + F''_{i2} \cos \frac{2 \pi x}{S} \right) dy_i = \\
 &= \sum_{i=1}^3 2 t \int_0^{b_i} F''_{i1} dy_i + \cos \frac{2 \pi x}{S} [F'_{12}(b_f) - F'_{12}(0) + \\
 &\quad + F'_{22}(b_w) - F'_{22}(0) + F'_{32}(b_l) - F'_{32}(0)]
 \end{aligned}
 \tag{V.14}$$

Utilizando as condições de contorno dadas na seção (III.2) obtêm-se

$$P = \sum_{i=1}^3 2 t \int_0^{b_i} F''_{i1} dy_i \tag{V.15}$$

A redistribuição de tensões axiais devida à flambagem local provoca um momento interno adicional que avaliado em torno de um eixo passando pelo enrijecedor, é dado por

$$M = 2 t \left[\int_0^{b_f} F''_{11} b_w dy_1 + \int_0^{b_w} F''_{21} y_2 dy_2 \right] \tag{V.16}$$

A substituição de F''_{i1} , da equação (III.23), fornece para P e M as seguintes expressões:

$$P = N_X^* \left[2 b_f + 2 b_w \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right) + 2 b_l (1 - \alpha) \right] - \frac{\pi^2}{2 S^2} W_1^2 a_1 \tag{V.17}$$

$$M = N_X^* b_w \left[2 b_f + b_w \left(1 - \frac{\alpha}{3} \right) \right] - \frac{\pi^2}{2 S^2} b_w W_1^2 a_2 \tag{V.18}$$

onde $N_X^* = 2 E t \frac{u^*}{S}$ e a_1 e a_2 foram definidos na seção (V.2).

O termo $\frac{\pi^2}{2 S^2} W_1^2 a_1$ na expressão de P representa uma redução de carga em relação àquela de uma solução linear, provoca da pela flambagem local e ilustrada na Figura (V.1) pela soma das áreas B_1 , B_2 e B_3 .

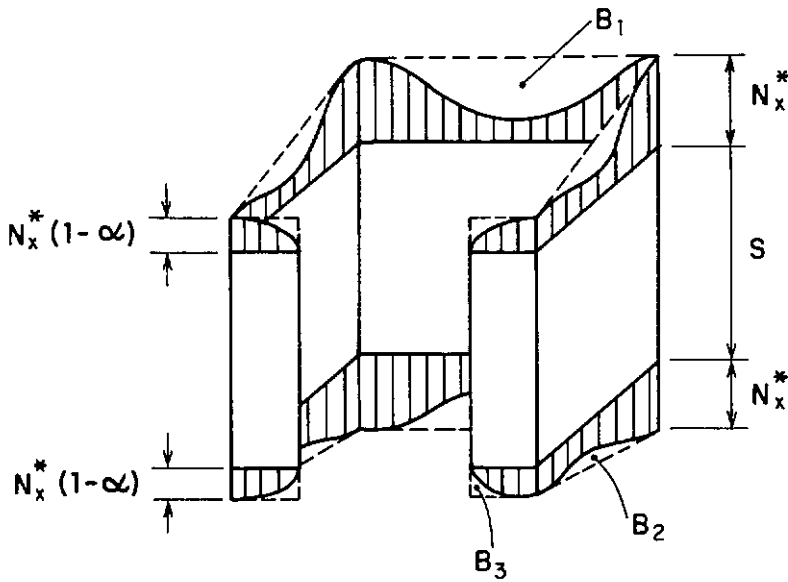


Figura V.1 - DISTRIBUIÇÃO DE TENSÕES APÓS A FLAMBAGEM LOCAL.

Para se obter a expressão do momento externo basta observar a Figura (III.1) para se concluir que

$$M_{\text{ext}} = P (\delta_c + d + e) \quad (\text{V.19})$$

A expressão para a deflexão central δ_c provém da manipulação algébrica das equações (V.12), (V.17) e (V.18) e da relação geométrica

$$\frac{1}{R} = \frac{d^2\delta}{dx^2} = - \frac{2 u^* \alpha}{S b_w} \quad (V.20)$$

deduzida a partir da Figura (V.2), e onde $\frac{1}{R}$ é a curvatura de um elemento na direção longitudinal.

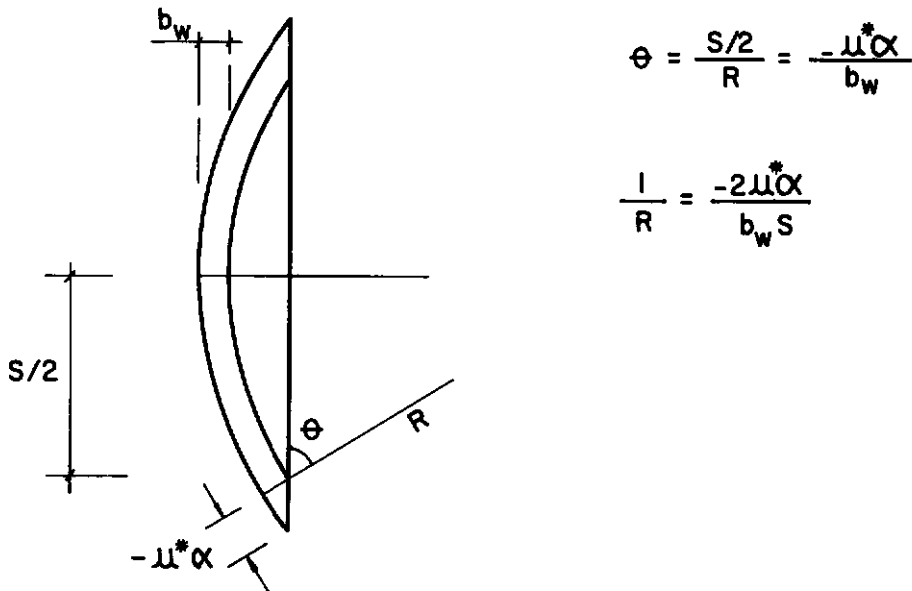


Figura V. 2 - DEDUÇÃO DA EXPRESSÃO DA CURVATURA DE UM ELEMENTO NA DIREÇÃO LONGITUDINAL.

A equação (V.20), válida para uma coluna de comprimento S , é aplicada a um elemento infinitesimal de coluna com qualquer comprimento.

Para se chegar à equação diferencial da qual será calculada a deflexão central δ_c substitui-se inicialmente a equação (V.12) nas equações (V.17) e (V.18) eliminando-se assim o coeficiente W_1 . Obtêm-se então:

$$P = E t \left[\frac{2 u^*}{S} \left(2 b_f + 2 b_w + 2 b_l - \frac{2 a_1^2}{a_4} \right) - \frac{2 u^* \alpha}{S} \left(b_w + 2 b_l - \alpha \frac{a_1}{a_4} (a_2 - a_1) \right) + \frac{\pi^2}{2 S^2} \frac{a_1 a_3}{a_4} \right] \quad (V.21)$$

$$M = E t \left[\frac{2 u^*}{S} \left(b_w \left(2 b_f + b_w - \frac{2 a_1 a_2}{a_4} \right) - \frac{2 u^* \alpha}{S} \left(\frac{b_w^2}{3} + 2 b_w \frac{a_2}{a_4} (a_2 - a_1) \right) + \frac{\pi^2 b_w}{2 S^2} \frac{a_2 a_3}{a_4} \right) \right] \quad (V.22)$$

A seguir escreve-se uma expressão para u^* a partir da equação (V.21), como abaixo:

$$u^* = \left[\frac{P}{t t} + \frac{2 u^* \alpha}{S} \left(b_w + 2 b_l - \frac{2 a_1}{a_4} (a_2 - a_1) \right) - \frac{\pi^2}{2 S^2} \frac{a_1 a_3}{a_4} \right] \times \frac{S}{2 (2 b_f + 2 b_w + 2 b_l - 2 a_1^2/a_4)} \quad (V.23)$$

Substituindo-se a expressão (V.23) na equação (V.22) obtêm-se:

$$M = P d^* + \frac{2 u^* \alpha}{S b_w} E I^* - M^* \quad (V.24)$$

onde

$$d^* = \frac{b_w (2 b_f + b_w) - 2 b_w a_1 a_2 / a_4}{2 b_f + 2 b_w + 2 b_l - 2 a_1^2 / a_4} \quad (V.25)$$

$$I^* = t b_w^2 \left\{ \frac{[b_w + 2 b_l - \frac{2 a_1}{a_4} (a_1 - a_2)] [2 b_f + b_w - \frac{2 a_1 a_2}{a_4}]}{2 b_f + 2 b_w + 2 b_l - 2 a_1^2 / a_4} - \left[\frac{b_w}{3} - \frac{2 a_2}{a_4} (a_1 - a_2) \right] \right\} \quad (V.26)$$

$$M^* = \frac{E t \pi^2}{2 S^2} b_w \left[\frac{\frac{a_1 a_3}{a_4} (2 b_f + b_w - \frac{2 a_1 a_2}{a_4})}{2 b_f + 2 b_w + 2 b_l - \frac{2 a_1^2}{a_4}} - \frac{a_2 a_3}{a_4} \right] \quad (V.27)$$

Finalmente substitui-se em (V.24) as expressões para M , equação (V.18), e para $\frac{d^2 \delta}{dx^2}$, equação (V.20), o que conduz à equação diferencial

$$E I^* \frac{d^2 \delta}{dx^2} + P \delta = - P \left(e + (d - d^*) + \frac{M^*}{P} \right) \quad (V.28)$$

cuja solução é

$$\delta = \left[e + (d - d^*) + \frac{M^*}{P} \right] \left[\sec \sqrt{\frac{P L^2}{4 E I^*}} \cos \sqrt{\frac{P}{E I^*}} x - 1 \right] \quad (V.29)$$

A deflexão central $\bar{\delta}$ é obtida fazendo-se $x = 0$ na expressão de δ :

$$\delta_c = \left[e + (d - d^*) + \frac{M^*}{P} \right] \left[\sec \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_E^*}} - 1 \right] \quad (V.30)$$

onde

$$P_E^* = \frac{\pi^2 E I^*}{L^2} \quad (V.31)$$

O significado físico dos parâmetros envolvidos nas equações apresentadas anteriormente é dado a seguir:

a) d^* é a posição efetiva do centroide, contada a partir do enrijecedor, após a flambagem local;

b) I^* é o momento de inércia reduzido da seção após a flambagem local;

c) P_E^* é a carga crítica de Euler reduzida, para a qual tende o caminho pós-crítico.

Quanto ao parâmetro M^* , conclui-se, após manipulação algébrica da equação (V.27), que ele pode ser escrito como

$$M^* = P_{cr} (d^* - d) \quad (V.32)$$

onde

$$P_{cr} = \frac{E \pi^2}{4 S^2} \frac{a_3}{a_1} A = \sigma_{cr} A$$

ou seja P_{crit} é a carga crítica local de uma coluna curta sujeita a compressão axial ($\alpha = 0$).

Uma vez conhecida a expressão para a deflexão δ_c pode-se igualar o momento interno, equação (V.18), ao momento externo, equação (V.19), o que conduz a uma expressão da forma

$$f(\alpha) = 0$$

(V.33)

para um dado valor de u^* .

Conforme já mencionado, os maiores efeitos da flambagem local são:

- a redução da rigidez axial e rigidez de flexão;
- a alteração da geometria efetiva da seção, o que causa variação na posição efetiva do centroide.

Devido a estes efeitos uma carga inicialmente concêntrica se tornará efetivamente excêntrica, e uma inicialmente excêntrica terá sua excentricidade efetivamente alterada. Se a linha de ação da carga é fixa então o parâmetro de excentricidade dos encurtamentos axiais, α , tem de mudar para cada posição de equilíbrio. O valor de α que fornece equilíbrio para um determinado estágio de compressão u^* é dado pela resolução numérica da equação (V.33), via método de Newton-Raphson. Para o conhecimento completo do comportamento pós-crítico da coluna repete-se este procedimento para diferentes valores de encurtamento do flange u^* .

V.4. APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS

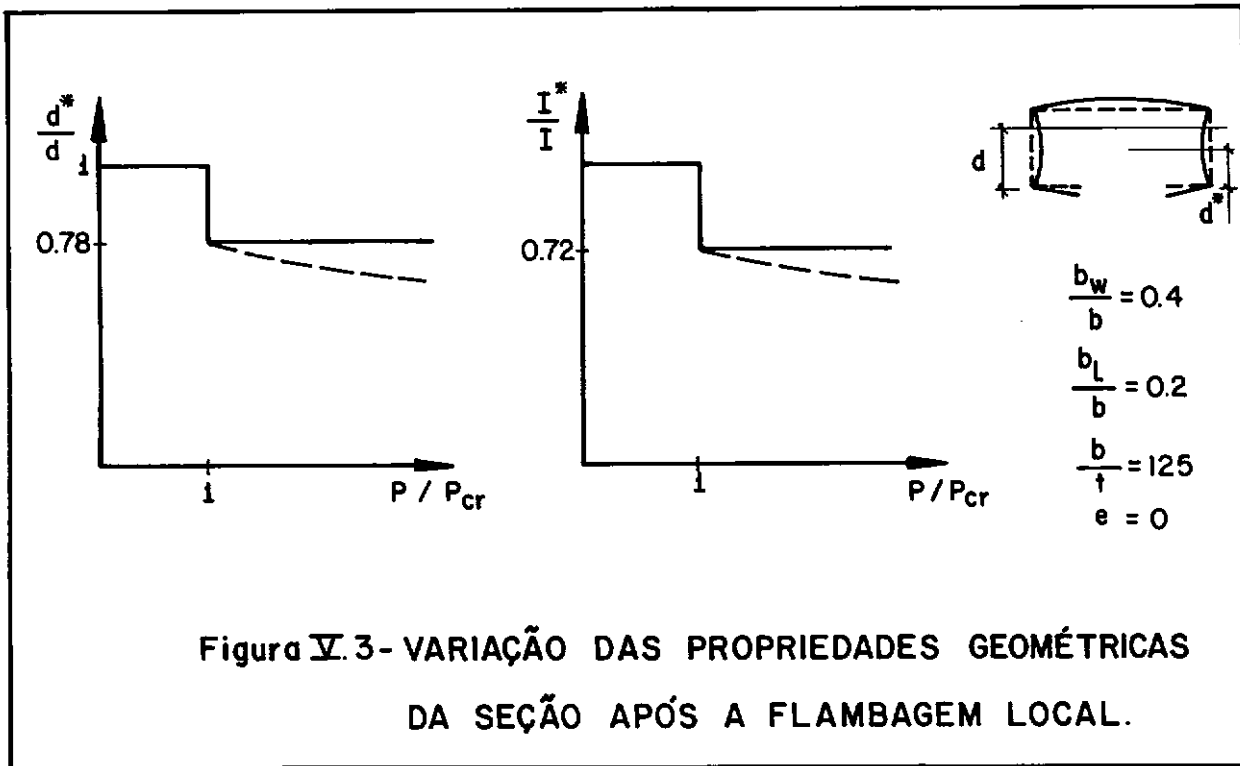
O comportamento pós-crítico local de colunas longas de seção transversal U enrijecida é mostrado a seguir através das respostas carga x deslocamento bem como de diagramas de tensão axial e deslocamentos transversais para diferentes níveis de

carga.

V.4.1. COLUNA SOB CARGA CENTRADA

Variação das propriedades geométricas da seção

A posição efetiva do centroide d^* e o momento de inércia da seção I^* sofrem uma queda brusca no ponto crítico conforme ilustra a Figura (V.3).



A linha cheia nesta figura indica o resultado obtido com a análise apresentada aqui, isto é, utilizando-se o modo crítico local. Na verdade as propriedades geométricas da seção continuam variando após a flambagem local conforme ilustrado pela

linha tracejada; isto seria obtido combinando-se outros modos com o modo crítico. Entretanto, esta variação é bastante suave [9] e para uma carga igual ao dobro da carga crítica o erro que se comete ao considerar-se I^* e d^* constantes após a flambagem local é geralmente desprezível.

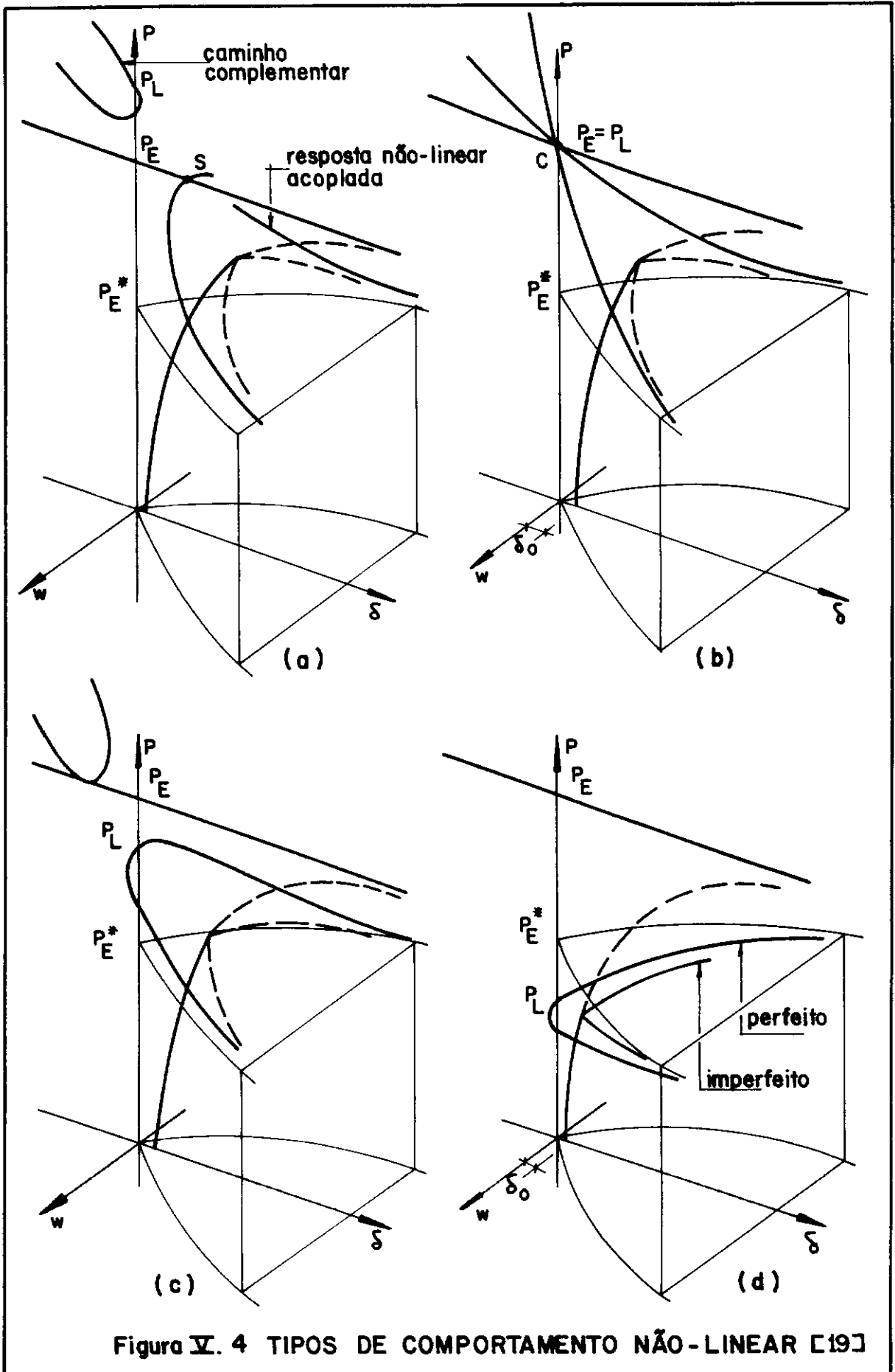
Tipos de comportamento pós-crítico

Baseados num modelo de Shanley bastante simples para colunas sujeitas a flambagem local, THOMPSON e colaboradores [19] inferiram o comportamento pós-crítico de painéis esbeltos enrijecidos sob compressão axial. Os distintos comportamentos não-lineares, em função das cargas críticas global P_E e local P_L , quando comparadas à carga crítica de Euler reduzida P_E^* , são ilustradas nas Figuras (V.4).

Observa-se nestas figuras que respostas pós-críticas estáveis com acoplamento dos modos global e local existem somente nos casos em que $P_L < P_E^*$, sendo instáveis nos outros casos. Observa-se ainda que o equilíbrio neutro associado à carga crítica de Euler, P_E , é usado apenas de forma ilustrativa já que decorre da linearização da equação de equilíbrio (uma análise não-linear indicaria uma resposta pós-crítica estável associada ao modo global).

No caso de $P_L > P_E$, Figura (V.4.a), a resposta não-linear acoplada ocorre para um ponto de bifurcação secundária, S. A partir deste ponto o equilíbrio torna-se instável de forma análoga ao caso em que $P_E^* < P_L < P_E$ da Figura (V.4.c).

A Figura (V.4.b) mostra o comportamento não-linear instável



vel da coluna quando há coalescência das cargas críticas ($P_E = P_L$), conforme já discutido na seção (II.2.3).

É interessante notar que os caminhos de equilíbrio são simétricos em relação ao eixo de deslocamentos globais δ_C , isto é, independem do sinal dos deslocamentos do modo local w (vide a equação (V.12) que fornece os valores de W_1 de equilíbrio).

Os resultados numéricos obtidos com a análise apresentada neste trabalho são mostrados na Figura (V.5) e constituem projeções dos caminhos de equilíbrio das Figuras (V.4) para estruturas perfeitas sobre o plano $P \times \delta_C$. As colunas sob carga centrada e de seção transversal como mostrado nesta figura têm comportamento pós-crítico estável para índices de esbeltez menores que 150 (para o qual $P_L = P_E^*$). Observa-se que a rigidez das colunas diminui com o aumento das deflexões tendendo, em função das aproximações adotadas, a um patamar relacionado a P_E^* . Uma análise mais refinada indicaria uma mudança de comportamento estável para instável nessas situações. Em particular, para colunas com índices de esbeltez próximos de 150 esta mudança ocorreria para pequenas deflexões.

Para obtenção das curvas de comportamento instável o que se faz normalmente é mudar o parâmetro de controle. No caso, o ideal seria dar incrementos na deflexão lateral δ_C e calcular a carga P e o encurtamento axial u^* correspondentes. Porém a expressão

$$\delta_C = \left[e + (d - d^*) + \frac{M^*}{P} \right] \left[\sec \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P^*}} - 1 \right] \quad (V.30)'$$

não permite escrever P em função de δ_C e conseqüentemente impe-

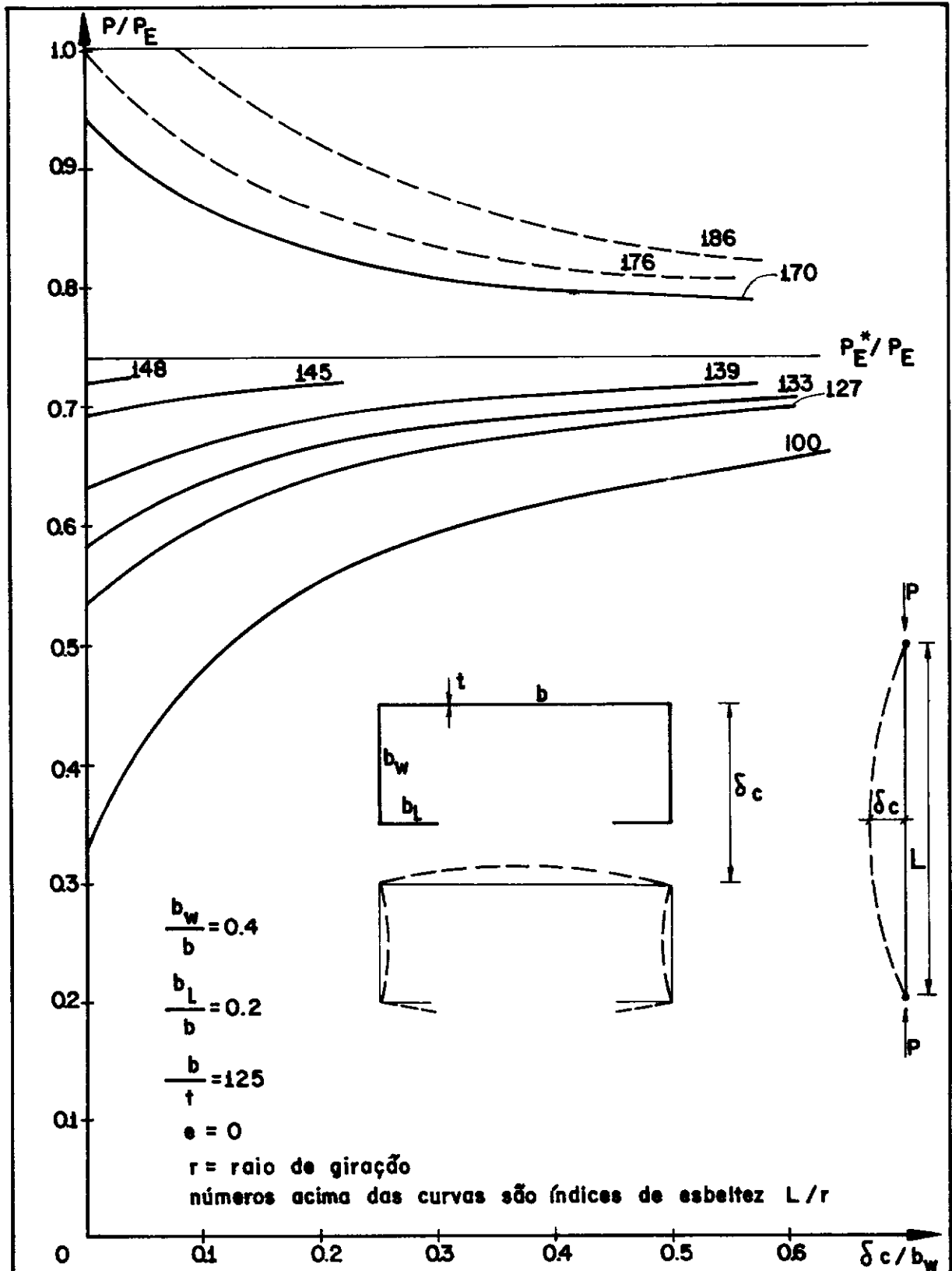


Figura V.5 - CURVAS CARGA x DESLOCAMENTO DE COLUNAS
 SOB CARGA CENTRADA PARA DIVERSOS
 ÍNDICES DE ESBELTEZ.

de a referida mudança no parâmetro de controle. A curva apresentada na Figura (V.5) para Índice de esbeltez igual a 170 foi obtida com incrementos em u^* a partir de u_{cr} exatamente como nas curvas de comportamento estável, mas com muito maior dificuldade devido à grande sensibilidade numérica do processo neste caso.

Este problema de instabilidade numérica pode ser contornado simplesmente com a utilização direta da equação (V.30), atribuindo valores a P entre os limites P_E^* e P_L . Resultados numéricos assim obtidos para respostas instáveis são mostrados na mesma Figura (V.5) pelas curvas tracejadas. Deve-se ressaltar entretanto, que este procedimento não permite a determinação das distribuições de tensão e deformada das seções transversais, já que estes cálculos dependem de u^* .

A Figura (V.6) mostra a variação das cargas críticas local (P_L) e global (P_E) com a esbeltez do flange b/t . Para seções com $b/t < 125$ a coluna apresenta flambagem local antes da global, o inverso ocorrendo no caso $b/t > 125$. Esta figura conduziria à conclusão de que a esbeltez ótima da placa é $b/t = 125$. No entanto, conforme já mencionado, a coalescência das cargas críticas provoca um comportamento pós-crítico instável, sensível a imperfeições iniciais. A presença de imperfeições locais induziriam cargas de flambagem reduzidas em relação à carga crítica teórica, como ilustrado naquela figura pela linha tracejada.

Carga última teórica

A variação da carga última teórica com o Índice de esbel

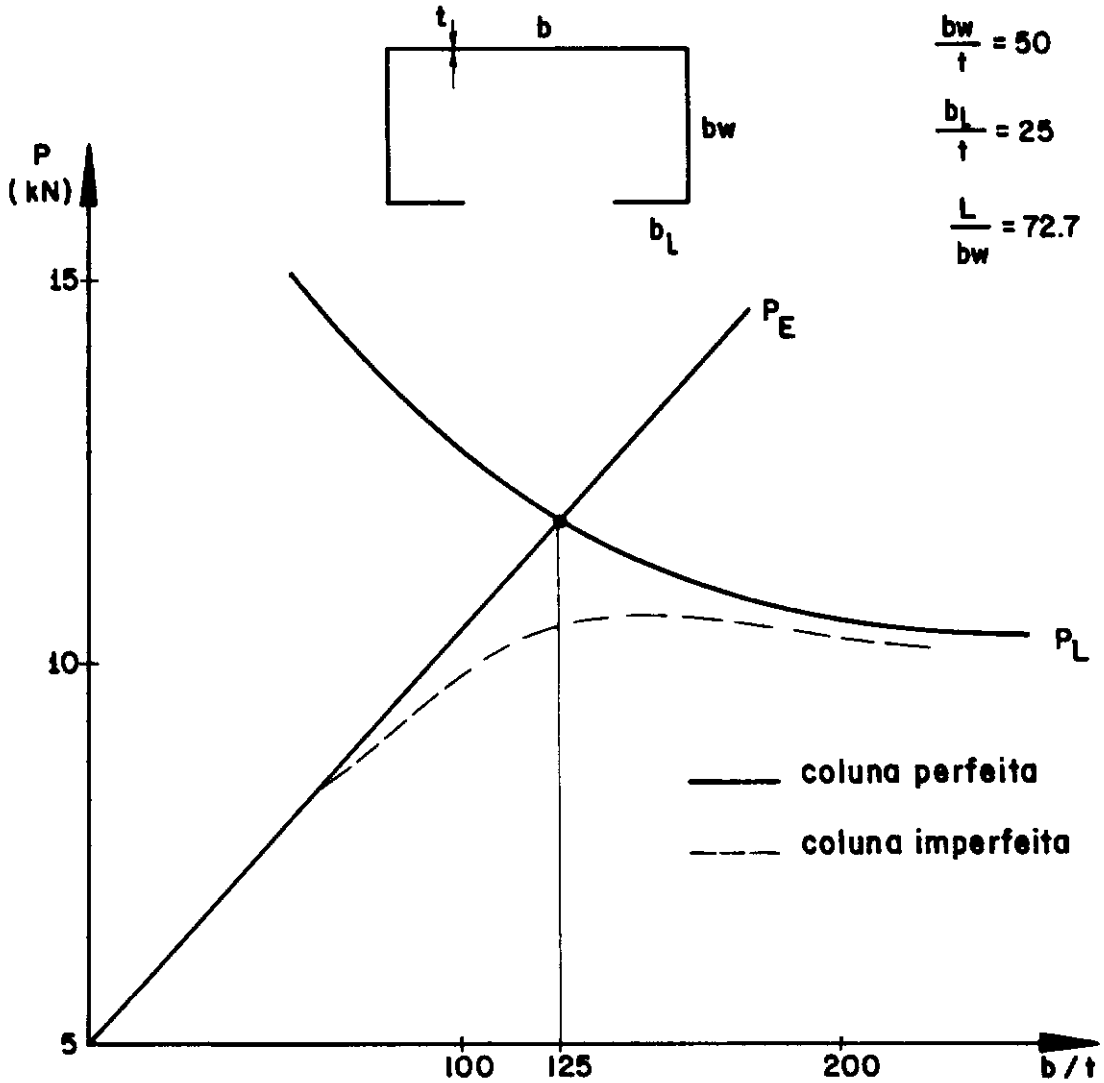


Figura V.6 - VARIAÇÃO DAS CARGAS CRÍTICAS LOCAL E GLOBAL COM A ESBELTEZ DO FLANGE b/t .

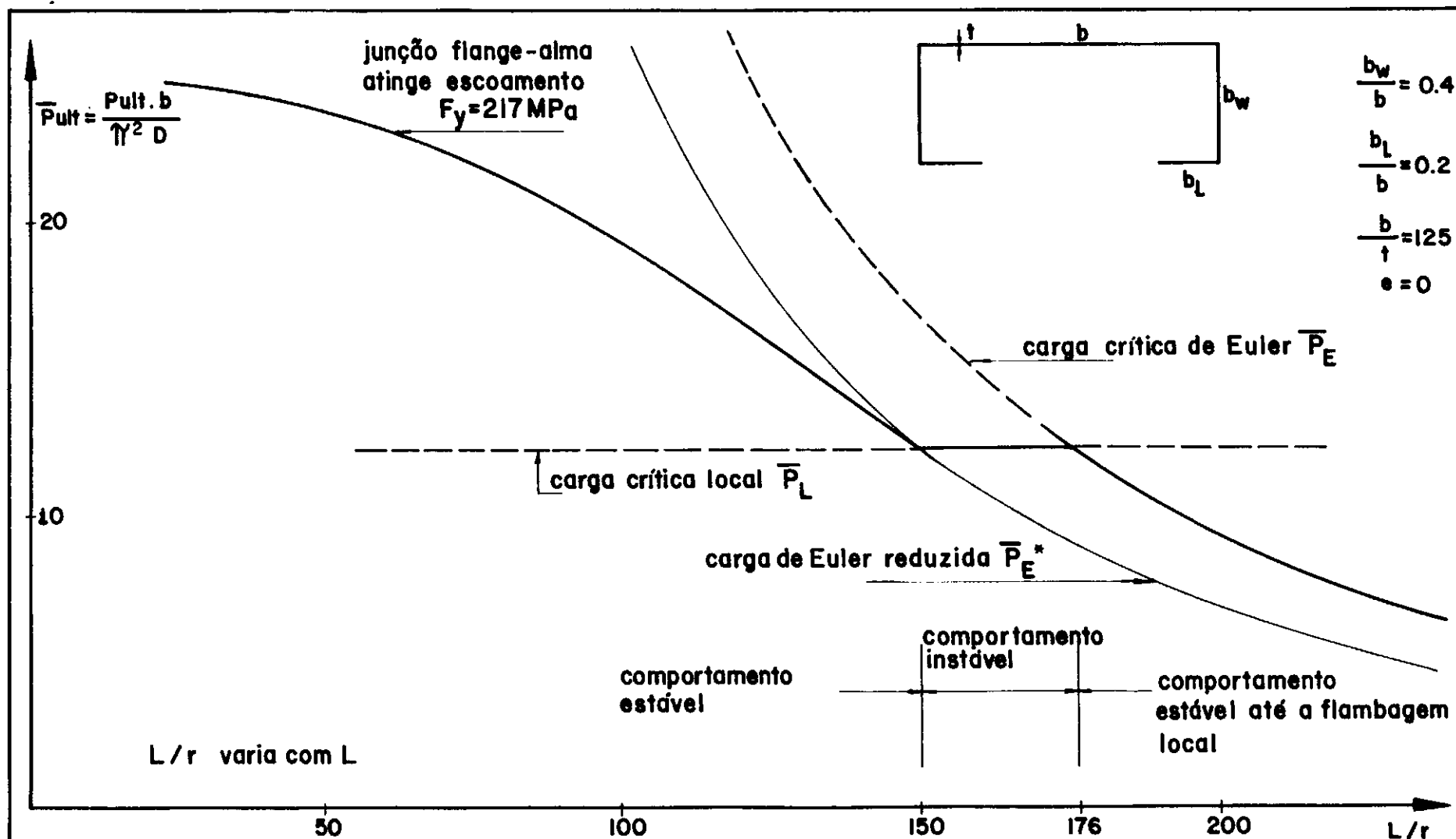


Figura V.7- CARGA ÚLTIMA TEÓRICA x ÍNDICE DE ESBELTEZ, PARA COLUNAS SOB CARGA CENTRADA.

tez da coluna L/r para carregamento centrado é apresentada na Figura (V.7), considerando-se a mesma seção transversal da Figura (V.5). A carga última teórica pode ser definida de três maneiras. Para colunas com índice de esbeltez $L/r < 150$ a carga última é aquela para a qual a tensão na junção flange-alma atinge o escoamento; este critério, obtido da análise elástica, é uma boa estimativa da carga de colapso [10]. Para colunas com esbeltez entre 150 e 176 a carga última teórica é a carga crítica local e para aquelas com esbeltez maior que 176 a carga última é a de Euler P_E . Estas três definições distintas para a carga última teórica em função do índice de esbeltez da coluna decorrem dos tipos de comportamento pós-crítico analisados anteriormente nas Figuras (V.4).

Diagramas de tensão e deslocamento

A Figura (V.8.a) mostra os deslocamentos transversais das placas na seção média da coluna ($x = 0$) para diferentes níveis de carga centrada. Observa-se que as deflexões do flange são muito maiores que as da alma e do enrijecedor. Por serem pequenas as deflexões destes dois elementos, elas são mostradas somente para o maior nível de carga.

As tensões axiais σ_x distribuídas ao longo desta seção são mostradas na Figura (V.8.b) para os mesmos níveis de carga da Figura anterior. A carga indicada por '1' é bem próxima da carga crítica local como se pode concluir da distribuição quase uniforme das tensões neste nível. Para cargas maiores, as tensões no enrijecedor continuam praticamente uniformes e na alma uma variação acentuada com pequena não-linearidade pode ser ob-

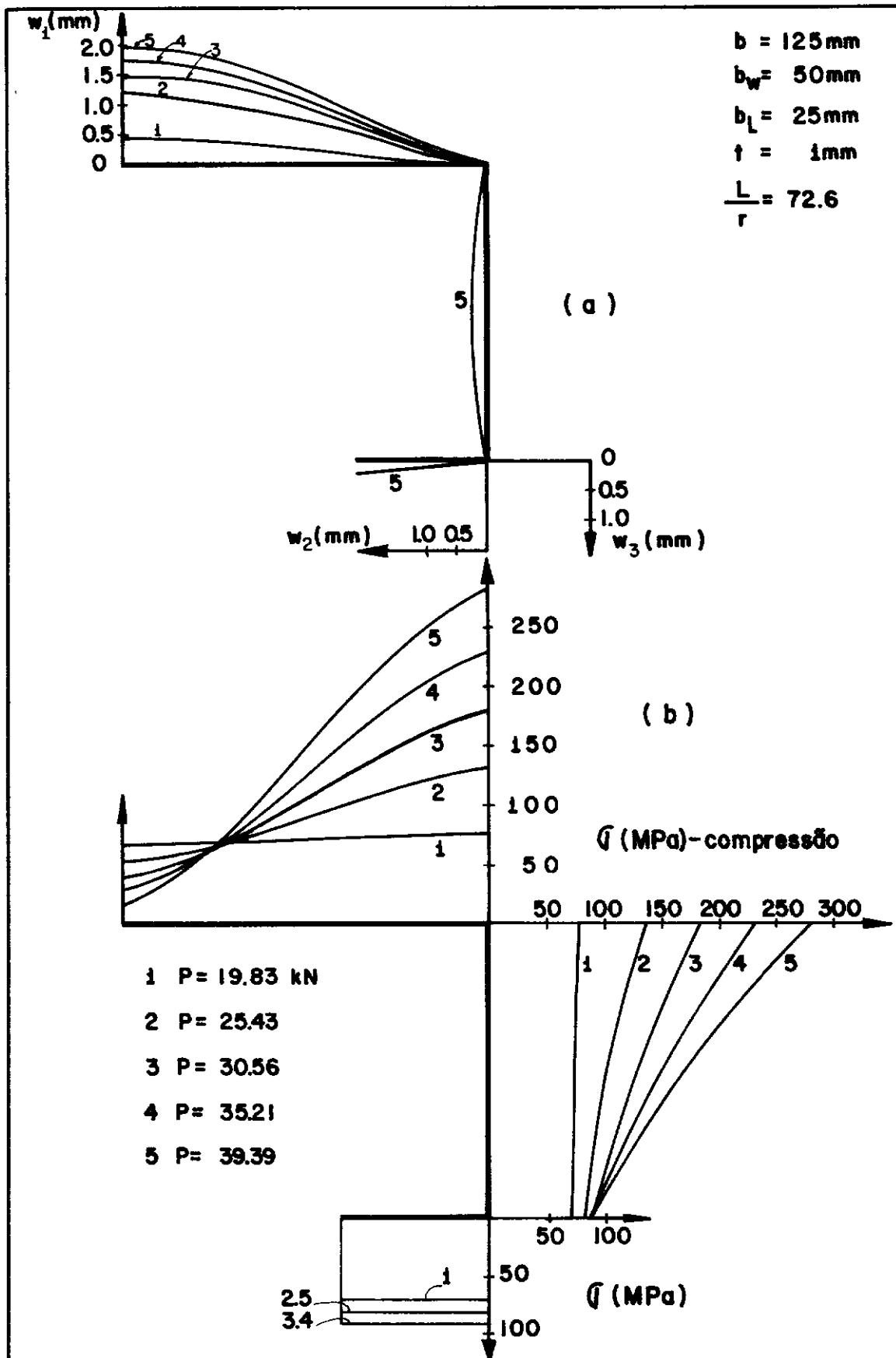


Figura V. 8 - DIAGRAMAS DE DESLOCAMENTO (a) E TENSÃO (b) PARA COLUNA SOB CARGA CENTRADA.

servada. No flange ocorrem grandes variações não-lineares de tensão axial, sendo portanto este elemento o mais afetado pelo processo não-linear pós-crítico local. Esta distribuição de tensões é típica de seções transversais como aquela indicada na Figura (V.8.b), na qual o flange é muito mais largo que as almas.

As Figuras (V.9.a) e (V.9.b) apresentam os diagramas de tensões em seções próximas à seção média da coluna: no nó da meia onda central ($x = S/2$) e a meio caminho entre o nó e a seção média ($x = S/4$) respectivamente (vide Figura (III.1)). Observa-se, comparando-se com a Figura (V.8.b), que as tensões, para um mesmo nível de carga, são maiores na seção média ($x = 0$) e decrescem na direção do nó ($x = S/2$). Pode-se notar ainda, que a maior tensão axial na seção do nó não ocorre na junção flange-alma mas num ponto próximo à ela no flange.

A evolução das distribuições de tensão σ_x , com decréscimo de carga, numa coluna de comportamento pós-crítico instável é apresentada na Figura (V.10). Estes resultados são referentes à resposta não-linear para $L/r = 170$ da Figura (V.5), na qual se vê que para pequenos decréscimos de carga desenvolvem-se grandes deflexões laterais. O diagrama de tensões reflete este comportamento através da variação de tensões que ocorre na alma e no enrijecedor, estando este último tracionado para o nível de carga '4'. Pode-se notar que aspecto da distribuição de tensões é o mesmo de coluna de comportamento estável, com variação não-linear no flange e de pequena não-linearidade no enrijecedor e na alma.

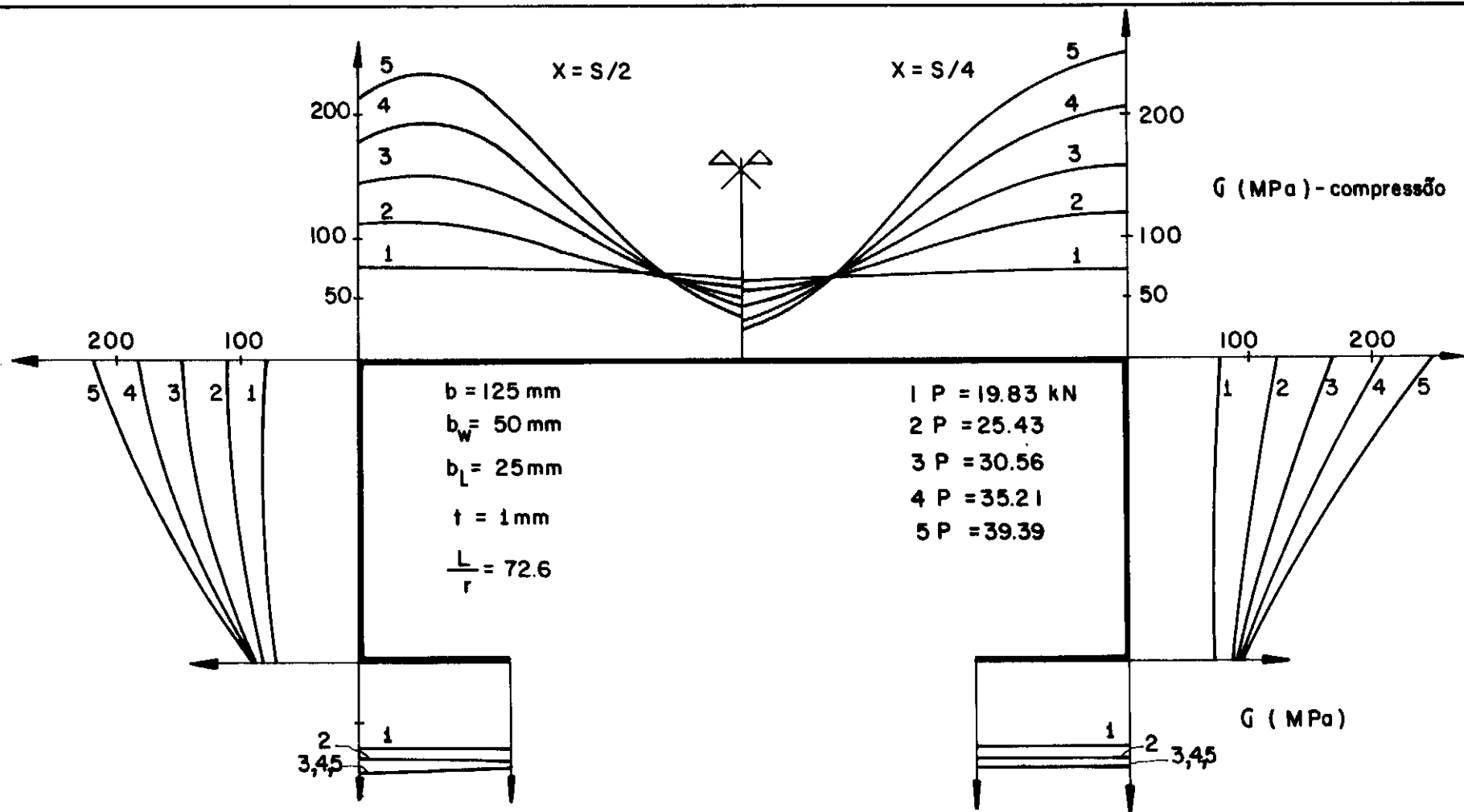


Figura V. 9 - DIAGRAMAS DE TENSÕES EM SEÇÕES PRÓXIMAS A SEÇÃO MÉDIA:
 $X = S/2$ e $X = S/4$ (VIDE FIGURA III. 1)

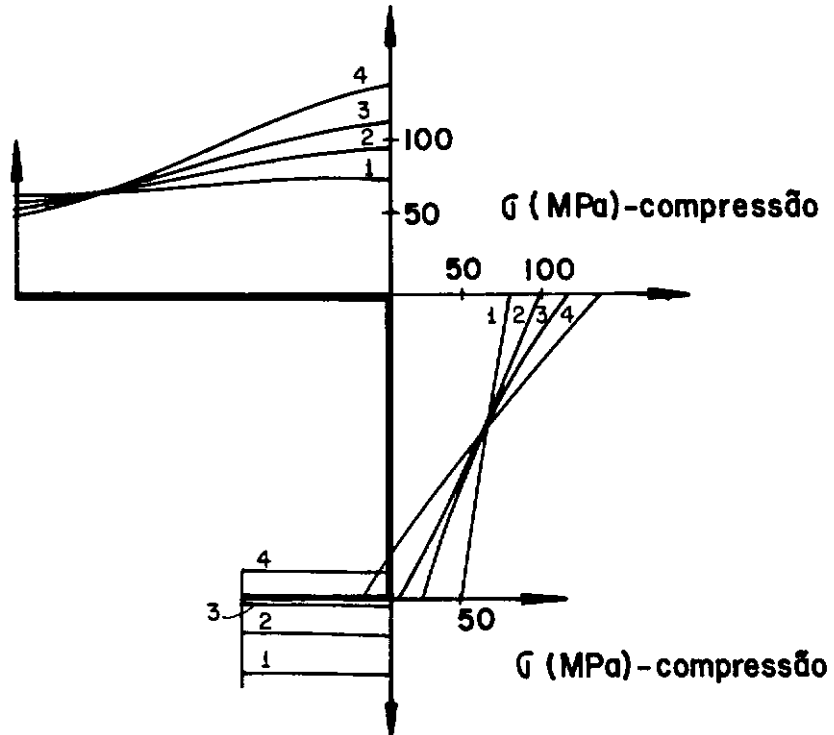
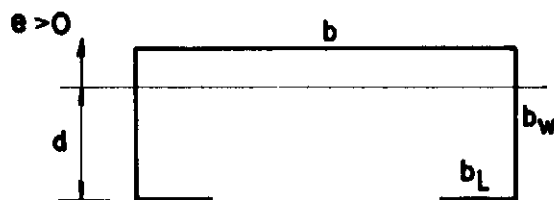
1 $P=11.20 \text{ kN}$ 2 $P=10.64$ 3 $P=10.36$ 4 $P=10.19$ $b = 100 \text{ mm}$ $b_w = 40 \text{ mm}$ $b_L = 20 \text{ mm}$ $t = 0.8 \text{ mm}$ $\frac{L}{r} = 170$ 

Figura V.10 DIAGRAMA DE TENSÕES PARA COLUNA DE COMPORTAMENTO INSTÁVEL

V.4.2. COLUNA SOB CARGA EXCÊNTRICA

As Figuras (V.11) mostram gráficos $P/P_E \times \delta_c/b_w$ de colunas carregadas com diferentes excentricidades relativas, $\bar{e} = e/(b_w - d)$. Observa-se que as curvas para $\bar{e} > 0$ constituem projeções do caminho de equilíbrio para estrutura imperfeita da Figura (V.4.d) sobre o plano $P \times \delta_c$. Isto significa que a ex-

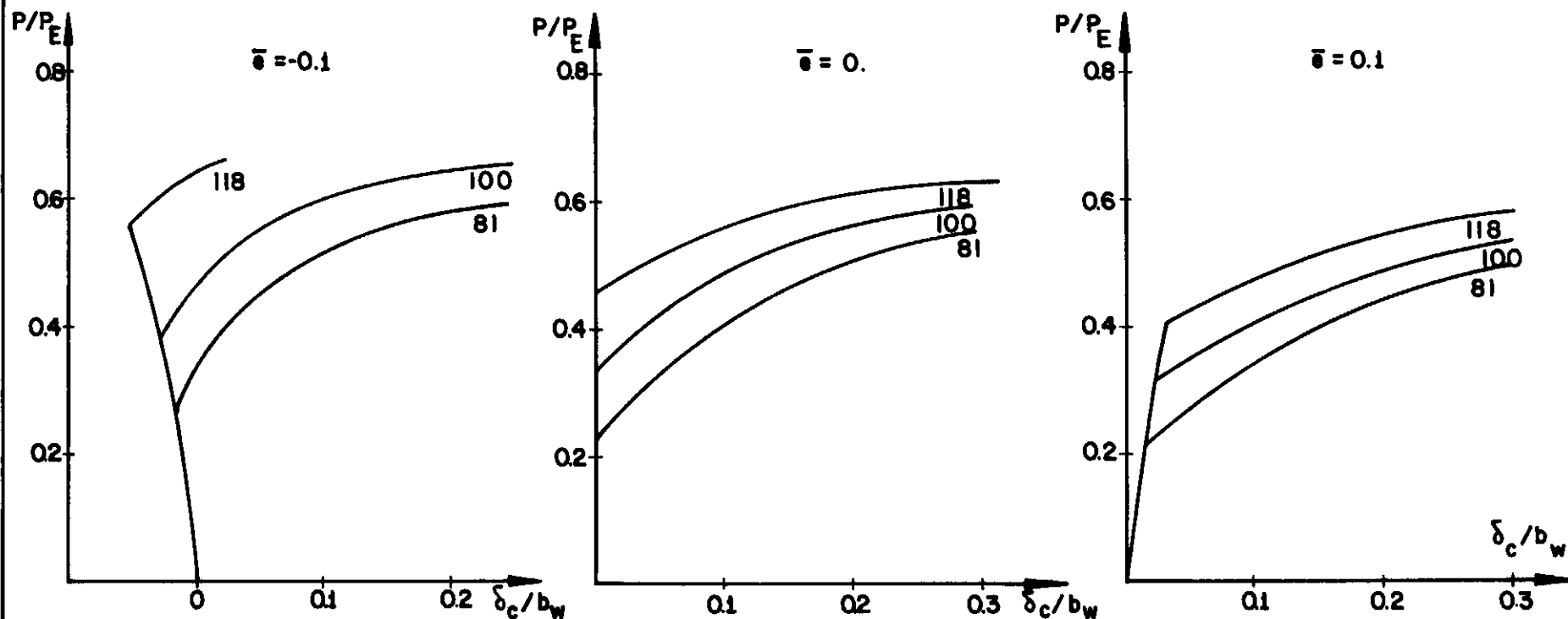


$$\frac{b_w}{b} = 0.4$$

$$\frac{b_L}{b} = 0.2$$

$$\frac{b}{t} = 125$$

$$\bar{e} = \frac{e}{(b_w - d)}$$



números abaixo das curvas indicam índice de esbeltez L/r

Figura V. 11 - COMPORTAMENTO PÓS-CRÍTICO DE COLUNAS SOB CARGA EXCÊNTRICA

centricidade de carga tem efeito equivalente ao de imperfeições no modo global.

A coluna sob carregamento centrado começa a desenvolver deflexões laterais δ_c a partir da carga crítica, pois neste ponto há uma mudança na posição efetiva do centroide. Então, se a linha de ação da carga permanece fixa e a posição efetiva do centroide se move em direção ao enrijecedor, o carregamento inicialmente centrado passa a ser efetivamente excêntrico na direção do flange.

As colunas sujeitas a carga excêntrica apresentam deflexões laterais desde o início do carregamento sendo que a partir da carga crítica a excentricidade efetiva é alterada devido aos efeitos da flambagem local.

Observa-se ainda que a carga crítica da coluna sob carga excêntrica na direção do flange ($e > 0$) é menor do que para coluna carregada uniformemente. Já a coluna sob carga excêntrica na direção do enrijecedor ($e < 0$) tem carga crítica maior que aquela sob carga centrada. Este resultado já havia sido obtido na análise linearizada e está apresentado na seção (IV.2). Entretanto os valores de carga crítica de colunas carregadas excentricamente resultantes da análise não-linear diferem dos obtidos pela análise linearizada, assunto este que será discutido a seguir.

As curvas apresentadas na Figura (V.11) para os casos de carregamento excêntrico foram obtidas "percorrendo-se" o caminho pós-crítico de equilíbrio no sentido oposto, isto é, com decréscimos de encurtamento axial u^* a partir de um ponto de equilíbrio em estágio avançado de deflexão. O processo termina

quando o caminho fundamental \bar{e} é interceptado, o que ocorre no ponto crítico. A carga crítica assim obtida para a coluna da Figura (V.11) com $\bar{e} = 0,74$ é 10% menor que a obtida na análise linearizada. Este resultado é consequência da hipótese feita de que o estado fundamental de equilíbrio é um estado puro de membrana, traduzido pela relação linear entre a carga e deslocamento axial (vide equações (II.22)), como se vê na Figura (V.12). Na realidade uma coluna sob carga excêntrica começa a desenvolver deflexões laterais desde o início do carregamento não sendo, portanto, o estado fundamental um estado puro de membrana neste caso.

A Figura (V.13) mostra a comparação entre os comportamentos não-lineares de uma coluna longa sob carga excêntrica obtidos considerando-se ou não a deformabilidade da seção transversal. Quando não se leva em conta os efeitos da flambagem local a equação (V.30) se reduz a

$$\delta_c = e \left[\sec \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_E}} - 1 \right] \quad (V.34)$$

que descreve a resposta pré-crítica local de uma coluna carregada excêntricamente. O que esta figura mostra claramente é a grande redução de carga máxima devida à interação entre os modos local e global. Observa-se, neste caso em que $P_L < P_E$, que o início desta interação não-linear se dá de forma prematura, reduzindo largamente a capacidade da coluna.

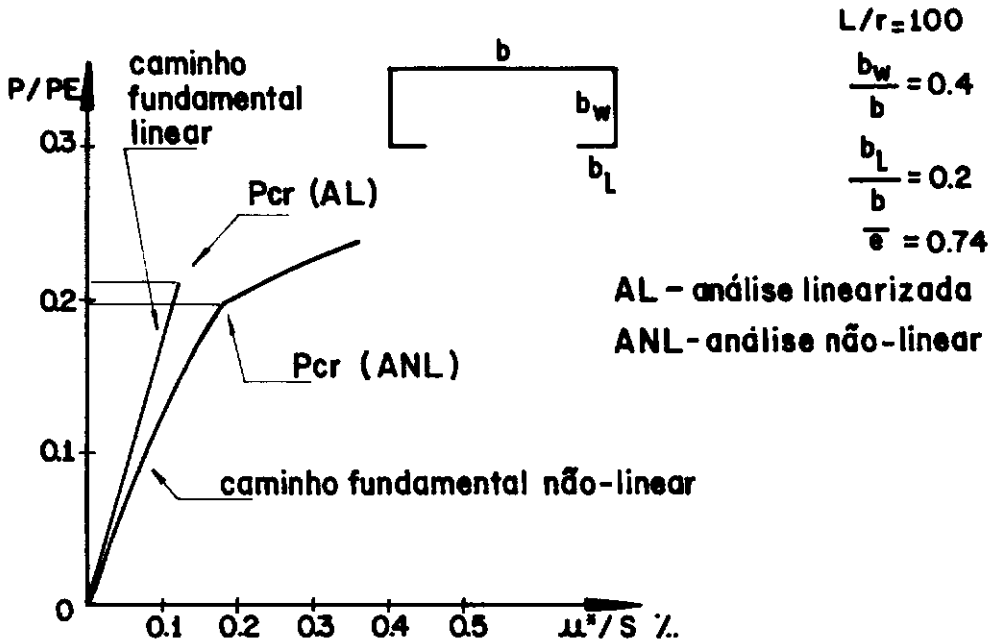


Figura V.12 - DIFERENÇA NOS VALORES DE CARGA CRÍTICA OBTIDOS COM A ANÁLISE LINEARIZADA E COM A ANÁLISE NÃO-LINEAR.

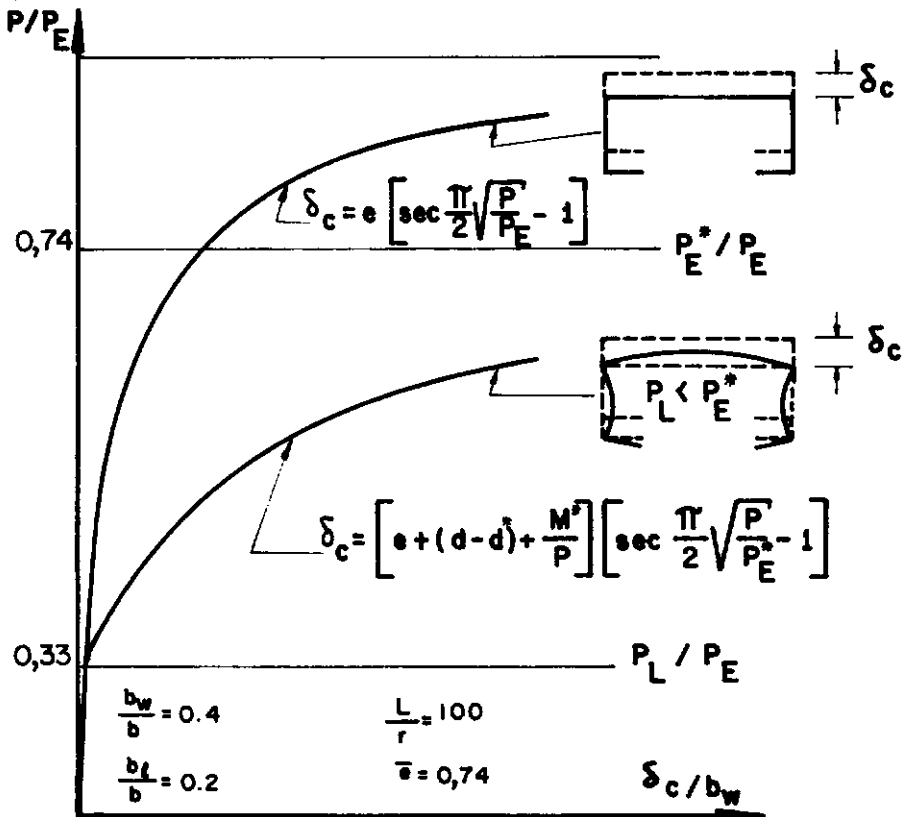


Figura V.13 - IMPORTÂNCIA DA CONSIDERAÇÃO DA DEFORMABILIDADE DA SEÇÃO NA RESPOSTA NÃO-LINEAR DE UMA COLUNA LONGA.

V.5. COMPARAÇÃO DOS RESULTADOS

Os resultados apresentados na seção anterior são aqui comparados com outros resultados teóricos e experimentais.

Os resultados obtidos por LOUGHLAN e RHODES [9,10] com o mesmo método de análise deste trabalho, levaram em conta o acoplamento de dois modos pós-críticos na série da função deslocamento

$$w_i = (W_1 Y_{cr,i} + W_2 Y_{2,i}) \cos \frac{\pi x}{S} \quad (V.35)$$

permitindo, desta maneira, uma variação contínua das propriedades geométricas da seção, como indica a linha tracejada da Figura (V.3).

A Figura (V.14) mostra uma comparação entre resultados desta análise não-linear e aqueles obtidos no presente trabalho. Nota-se, como esperado, que o comportamento da coluna considerando-se o acoplamento entre dois modos (equação (V.35)) é mais flexível — pelo menos para estágios avançados de deflexão — que aquele indicado pela presente análise, a qual considera apenas um modo pós-crítico na forma do modo crítico. Observa-se, para $L/r = 100$, que para cargas até 50% maiores que a carga crítica os resultados são coincidentes e as tensões atuantes na seção para este nível de carga são aproximadamente iguais às mostradas pela curva 4 da Figura (V.8.b). Assim, como a presente análise conduz a resultados idênticos a esta outra mais refinada para níveis de carga e tensões bastante elevados, é válida sua utilização para estimativas de carga última, pelo menos

para colunas constituídas de aço comum. Para uma coluna como a da Figura (V.14), feita de aço com tensão de escoamento igual a 232 MPa (33 ksi), a tensão na junção flange-alma atinge o escoamento para uma carga igual a $1,7 P_{cr}$. Neste ponto, para a coluna com $L/r = 100$, os resultados das duas análises são praticamente iguais.

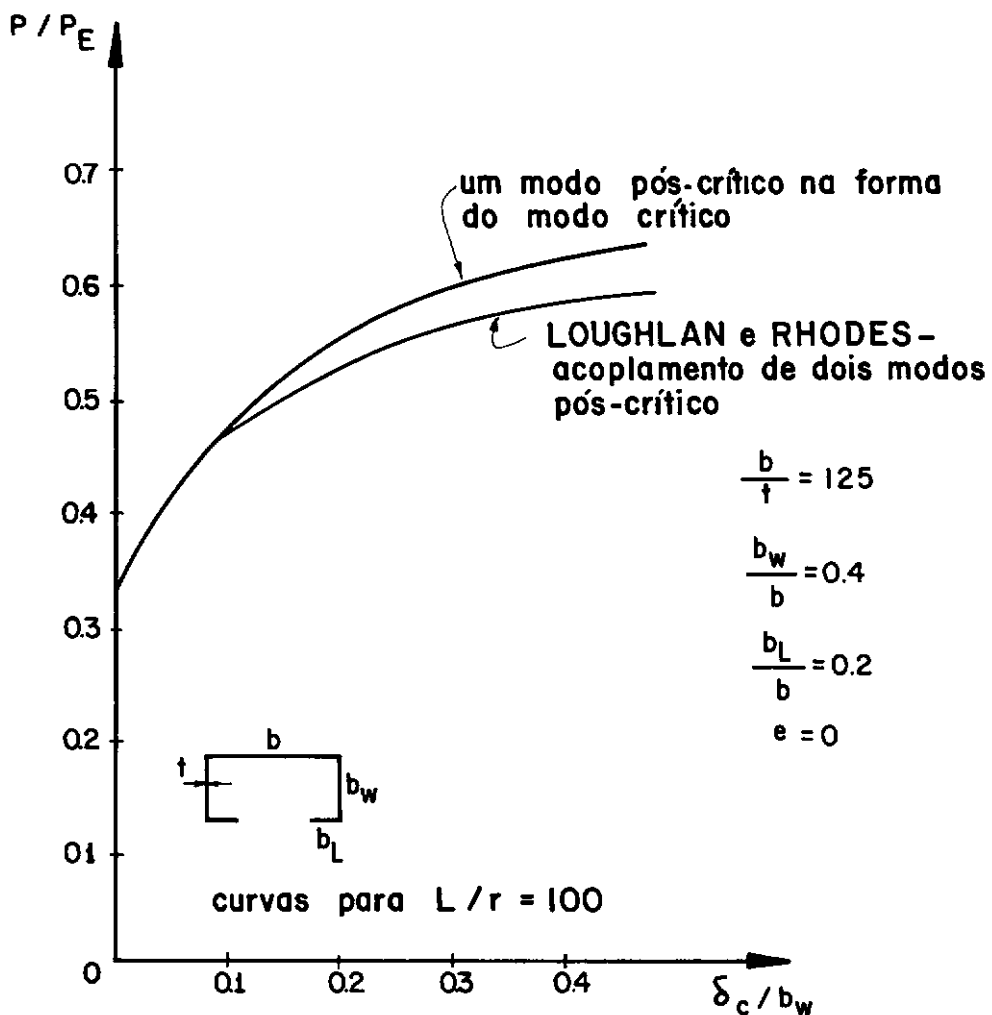


Figura V.14 - COMPARAÇÃO ENTRE RESULTADOS DE LOUGHLAN E RHODES [9] E OS OBTIDOS NO PRESENTE TRABALHO.

Os resultados experimentais de HARVEY [21] são utilizados para comparação com a carga última teórica obtida com o presente método semi-analítico e de acordo com os critérios já explicitados na seção anterior. Observa-se na Figura (V.15) que os resultados experimentais, embora distribuídos próximos aos teóricos, situam-se abaixo da curva de carga última. Isto já era esperado, uma vez que os resultados teóricos não prevêm as imperfeições tais como efeitos de tensões residuais, de dobramento a frio das chapas metálicas e imperfeições geométricas no modo local. Observa-se ainda, embora não se possa tirar nenhuma conclusão a respeito, que a curva para carga crítica local constitui um limite inferior para estes resultados experimentais.

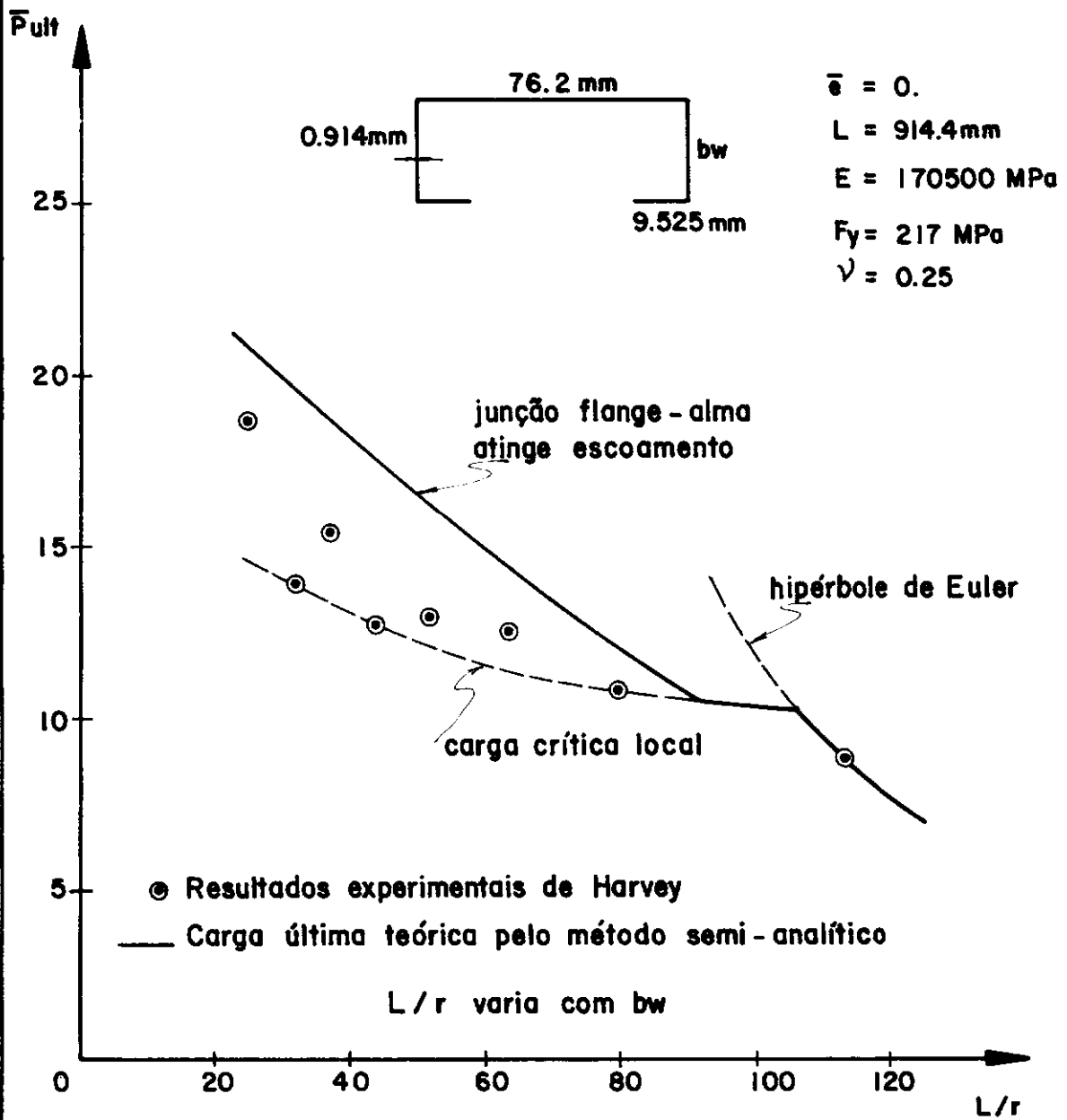


Figura V. 15 - COMPARAÇÃO ENTRE AS CARGAS
 ÚLTIMAS TEÓRICAS E OS RESULTADOS EXPERIMENTAIS
 DE HARVEY [21]

CAPÍTULO VI

COMPARAÇÃO COM NORMAS DE PROJETO

VI.1. INTRODUÇÃO

Com a finalidade de comparar os resultados de carga última teórica obtidos neste trabalho com as cargas admissíveis prescritas por normas de projeto, apresentam-se os critérios de dimensionamento dados pelas normas da

- AISI - *American Iron and Steel Institute* [24]
- SAA - *Standards Association of Australia* - AS1538 [23]
- CSA - *Canadian Standards Association* - S136 [25]

para o cálculo de estruturas de chapas conformadas a frio.

VI.2. AISI - 1980

A filosofia de projeto de colunas formadas por chapas dobradas a frio, sujeitas apenas a flambagem por flexo-compressão, é essencialmente a mesma daquelas de colunas formadas por perfis laminados. A importância da resistência pós-flambagem dos elementos de placa e o problema da interação entre a flambagem local e global são levados em conta através de um fator de forma Q , introduzido nas equações gerais para colunas.

Para determinar o fator Q , assume-se que os elementos de placa são independentes entre si e têm sua capacidade de carga calculada individualmente, conforme sejam elementos enrijecidos ou não enrijecidos.

Largura efetiva de elementos enrijecidos

Para levar em conta a não uniformidade do diagrama de tensões de uma placa após a flambagem local, utiliza-se o conceito de largura efetiva. O diagrama de tensões distribuídas não uniformemente em toda a largura é substituído por outro onde as tensões são uniformes numa largura b_e de tal maneira que a resultante não se altere. A expressão da largura efetiva b_e , originalmente proposta por Von Kármán foi modificada em função de dados experimentais resultando em

$$\frac{b_e}{t} = 1,9 \sqrt{\frac{E}{f_{\max}}} \left(1 - \frac{0,415}{w/t} \sqrt{\frac{E}{f_{\max}}} \right) \quad (\text{VI.1})$$

onde

w = largura total da placa

f_{\max} = tensão máxima; ocorre no bordo da placa

Substituindo-se o valor do módulo de elasticidade e introduzindo o coeficiente de segurança igual a 1,67 obtêm-se

$$\frac{b_e}{t} = \frac{664}{\sqrt{f}} \left[1 - \frac{145}{w/t \sqrt{f}} \right] \quad (VI.2)$$

com f em MPa.

A equação (VI.2) é a fórmula (2.3.1-1) da norma AISI a ser utilizada no cálculo de largura efetiva de elementos enrijecidos, sem enrijecedores intermediários, quando a razão w/t ultrapassa $449/\sqrt{F_y}$ com F_y em MPa.

Tensão admissível em elementos não enrijecidos

Elementos de placa não enrijecidos são aqueles que possuem um bordo livre paralelo à direção de aplicação da carga e outro apoiado. As tensões admissíveis para elementos de placa não enrijecidos segundo AISI estão ilustradas na Figura (VI.1), onde se podem distinguir três trechos:

a) Escoamento , $w/t < 166/\sqrt{F_y}$, F_y em MPa

$$F_c = 0,6 F_y \quad (VI.3)$$

b) Flambagem inelástica. , $166/\sqrt{F_y} < w/t < 378/\sqrt{F_y}$

$$F_c = F_y \left[0,767 - \frac{1}{10^3} (w/t) \sqrt{F_y} \right] , \quad (VI.4)$$

c) Flambagem elástica , $378/\sqrt{F_y} < w/t < 25$

$$F_c = \frac{55120}{(w/t)^2} \quad , \quad \text{com } F_c \text{ em MPa} \quad (\text{VI.5})$$

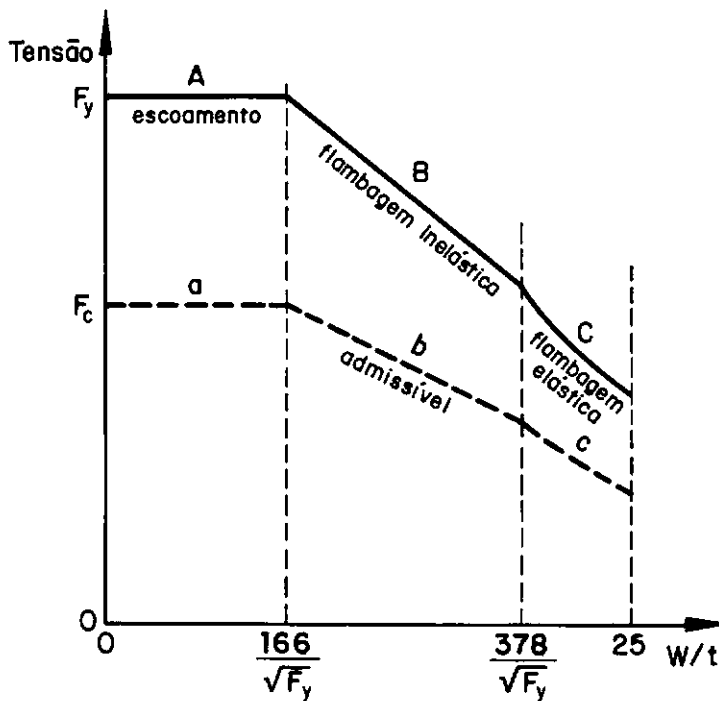


Figura VI.1 – TENSÃO ADMISSÍVEL EM ELEMENTOS NÃO ENRIJECIDOS.

Para valores de w/t maiores que 25 a norma permite o aproveitamento de resistência pós-flambagem exceto em cantoneiras pois estas praticamente não apresentam esta resistência. Para outras seções a carga crítica nesta faixa ($w/t > 25$) situa-se bem abaixo da tensão de escoamento, sendo as deformações elásticas. Para valores de w/t maiores que 60 a seção exibe deformação excessiva o que a torna indesejável.

Então, para $25 < w/t < 60$:

$$\text{para cantoneiras} \quad F_c = 55120/(w/t)^2 \quad (\text{VI.6.a})$$

$$\text{para outras seções} \quad F_c = 136 - 1,93 (w/t) \quad (\text{VI.6.b})$$

Tensões admissíveis em colunas sujeitas a compressão axial

A tensão crítica de flambagem por flexão de colunas é:

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E_t}{(K L/r)^2} \quad (\text{VI.7})$$

onde

E_t = módulo tangente

$K L/r$ = comprimento efetivo

A maioria dos aços utilizados na fabricação de perfis de chapas finas como na de perfis laminados não possui limite de escoamento definido e as características do diagrama tensão-deformação dependem dos processos de dobragem ou laminação. Por não ser possível levar em conta estes fatores a equação (VI.7) é aproximada conservativamente por

$$\sigma_{cr} = F_y - \left(\frac{F_y^2}{4 \pi^2 E} \right) (K L/r)^2 \quad (\text{VI.8})$$

As colunas muito curtas têm como tensão última a própria tensão de escoamento; as colunas longas apresentam flambagem por flexão ainda no regime elástico e a eq. (VI.8) torna-se a equação de Euler

$$\sigma_E = \pi^2 E / (K L / r)^2 \quad (VI.9)$$

Dividindo-se as equações (VI.8) e (VI.9) pelo coeficiente de segurança obtêm-se as tensões admissíveis de colunas sujeitas a flambagem por flexão.

O efeito da flambagem local é levado em conta através da introdução de um fator Q nas equações de tensões admissíveis para colunas. O fator Q é um número menor que 1 que representa o enfraquecimento da seção (redução de rigidez) devido à flambagem local. Este fator depende da geometria da seção e é determinado de maneira distinta conforme a seção seja composta de elementos enrijecidos ou não enrijecidos.

Para uma seção composta de elementos enrijecidos

$$Q = Q_a = \frac{A_{eff}}{A} \quad (VI.10)$$

onde

A_{eff} = soma das áreas efetivas dos elementos calculados com a eq. (VI.2).

Para seções compostas de elementos não enrijecidos

$$Q = Q_s = \frac{F_c}{F} \quad (VI.11)$$

onde F_c é tensão admissível calculada com as equações (VI.3) a (VI.6) e $F = 0,6 F_y$, tensão básica de projeto.

Finalmente, se a seção tiver elementos enrijecidos e não enrijecidos

$$Q = Q_a \quad Q_s = \frac{A_{eff}}{A} \frac{F_c}{F} \quad (VI.12)$$

onde A_{eff} = soma das áreas efetivas dos elementos enrijecidos e das áreas totais dos elementos não enrijecidos. O cálculo de A_{eff} é feito neste caso tomando-se f igual a F_c , tensão referente ao elemento não enrijecido mais fraco.

O coeficiente de segurança para colunas sob compressão axial é 1,92, cerca de 15% maior que os coeficientes utilizados para outras solicitações. Este aumento no coeficiente de segurança serve para compensar a grande sensibilidade que apresentam estas colunas face a imperfeições geométricas e excentricidades acidentais de carga.

Introduzindo o coeficiente de segurança e o fator Q nas equações (VI.8) e (VI.9) chega-se às equações (3.6.1-1) e (3.6.1-3) da norma AISI:

$$\text{para } K L/r \leq \frac{C_c}{\sqrt{Q}}$$

$$F_a = \frac{1}{1,92} \left[Q F_y - \frac{(Q F_y)^2}{4 \pi^2 E} \left(\frac{K L}{r} \right)^2 \right] \quad (VI.13)$$

$$\text{para } K L/r > \frac{C_c}{\sqrt{Q}}$$

$$F_a = \frac{\pi^2 E}{1,92 (K L/r)^2} \quad (VI.14)$$

onde

$C_c = \sqrt{2 \pi^2 E / F_y}$, é o índice de esbeltez correspondente ao limite superior de colapso por flambagem elástica, definido por uma tensão média igual à metade da tensão de escoamento

r = raio de giração calculado sem redução da seção

F_a = tensão admissível de compressão axial

VI.3. AUSTRALIAN CODE AS1538

A norma australiana para cálculo de estruturas formadas por chapas dobradas a frio, AS1538, foi publicada pela primeira vez em 1974 e revisada em 1976, sendo essencialmente baseada na norma americana AISI de 1968.

No que se refere ao cálculo de colunas de paredes finas carregadas axialmente a filosofia de projeto é igual a da AISI, exposta anteriormente. As prescrições referentes a tensões admissíveis de elementos não enrijecidos e cálculo de largura efetiva de elementos enrijecidos são idênticas as da norma AISI.

O cálculo da tensão admissível da coluna comprimida de carga centrada é baseado na curva de Perry, que fornece o valor da tensão média no instante em que a tensão máxima atinge o escoamento. A consideração do efeito de flambagem local é feita também com o uso do coeficiente Q .

O cálculo da tensão admissível F_a da coluna é dado por

$$F_a = \frac{Q F_y}{\Omega} \left[\frac{(1 + (1 + \eta) F_{oc}/Q F_y)}{2} - \sqrt{\left(\frac{(1 + (1 + \eta) F_{oc}/Q F_y)}{2} \right)^2 - \frac{F_{oc}}{Q F_y}} \right] \quad (\text{VI.15})$$

onde

η = parâmetro de imperfeição = $0,25 F_{oc}/Q F_y$

F_{oc} = tensão crítica de Euler

Ω = coeficiente de segurança = 1,67

Q = fator de forma que leva em conta os efeitos da flambagem local.

Observa-se que as imperfeições são consideradas de maneira explícita enquanto que na AISI são levadas em conta genericamente através de um coeficiente de segurança maior.

O fator de forma Q para seções U enrijecidas é determinado da mesma forma que na norma AISI, isto é com a equação (VI.12). Baseado na referência [22], HANCOCK [23] sugere que o cálculo de Q seja feito sem redução de tensão admissível no enrijecedor ou seja

$$Q = \frac{A_{eff}}{A} \quad (VI.10)'$$

Este procedimento poderia ser justificado pelo fato de que, para seções com flange muito mais largo que o enrijecedor, este último elemento permanece praticamente indeformado conforme se observou no diagrama de deslocamento apresentado na seção V.4.1 (veja também [22]).

VI.4. CANADIAN CODE S136

A norma canadense para projeto de estruturas formadas por chapas dobradas a frio teve sua primeira edição em 1963. A versão atual é de 1974 e está acrescida de modificações feitas posteriormente.

Para o cálculo de colunas sob carregamento axial, é introduzido o coeficiente Q dado pela equação (VI.12), como nas outras duas normas. A tensão axial média da coluna, calculada sem redução na seção, não deve ultrapassar a tensão $Q F_a$, com F_a definida como segue:

(a) quando $F_p > F/2$

$$F_a = F - \frac{F^2}{4 F_p} \quad (\text{VI.16})$$

(b) quando $F_p \leq F/2$

$$F_a = F_p \quad (\text{VI.17})$$

onde $F = F_y/1,6$

$$F_p = \frac{\pi^2 E}{1,92 (K L/r)^2}$$

Na determinação de Q , o coeficiente Q_s , relativo aos elementos não enrijecidos, é dado por:

(a) quando $w/t \leq 0,37 \sqrt{E/1,6 F_a}$

$$Q_s = 1,0 \quad (\text{VI.18})$$

(b) quando $0,37 \sqrt{E/1,6 F_a} < w/t \leq 0,84 \sqrt{E/1,6 F_a}$

$$Q_s = 1,37 \left(1 - 0,724 \frac{w}{t} \sqrt{\frac{1,6 F_a}{E}} \right) \quad (\text{VI.19})$$

(c) quando $0,84 \sqrt{E/1,6 F_a} < w/t < 25$

$$Q_s = \frac{0,378}{(w/t)^2} \frac{E}{1,6 F_a} \quad (\text{VI.20})$$

(d) quando $25 < w/t \leq 60$

$$Q_s = \frac{0,378}{(w/t)^2} \frac{E}{1,6 F_a}, \text{ para cantoneiras}$$

$$Q_s = \frac{E}{1,6 \times 10^3 F_a} \left(1 - 0,015 \frac{w}{t}\right), \text{ para as outras seções} \quad (\text{VI.21})$$

O cálculo da largura efetiva de um elemento enrijecido é feito através da seguinte equação, que independe da tensão atuante

$$\frac{b_e}{t} = \frac{1,64 \sqrt{E}}{\sqrt{Q_s \times 1,6 F_a}} \quad (\text{VI.22})$$

VI.5. EXEMPLOS E COMPARAÇÕES

São apresentados a seguir exemplos de dimensionamento pelas normas AISI, AS1538 e CS136, e comparações entre estes dimensionamentos, os resultados obtidos na presente análise e resultados experimentais.

Seja uma coluna feita de aço com tensão de escoamento igual a 232 MPa carregada uniformemente, com as seguintes dimensões: $b = 100 \text{ mm}$, $b_w = 40 \text{ mm}$, $b_l = 20 \text{ mm}$, $t = 0,8 \text{ mm}$ e $L = 2000 \text{ mm}$.

Dimensionamento pela norma AISI

- Cálculo de Q

enrijecedor

$$\frac{w}{t} = \frac{20}{0,8} = 25 < \frac{378}{\sqrt{F_y}}$$

$$F_c = 136 - 1,93 (w/t) = \quad \quad \quad (VI.6.6)'$$

$$= 136 - 1,93 \times 25 = 87,8 \text{ MPa}$$

$$Q_s = \frac{F_c}{0,6 F_y} = \frac{87,8}{0,6 \times 232} = 0,63$$

alma

$$\frac{w}{t} = \frac{40}{0,8} = 50 > \frac{449}{\sqrt{F_y}} = 29,5$$

$$\frac{b_e}{t} = \frac{664}{\sqrt{89,6}} \left[1 - \frac{145}{50 \sqrt{89,6}} \right] = 48,6 \quad \quad \quad (VI.2)'$$

$$b_e = 38,9 \text{ mm}$$

flange

$$\frac{w}{t} = \frac{100}{0,8} = 125$$

$$\frac{b_e}{t} = \frac{664}{\sqrt{89,6}} \left[1 - \frac{145}{125 \sqrt{89,6}} \right] = 61,5$$

$$b_e = 49,2 \text{ mm}$$

$$Q_a = \frac{A_{\text{eff}}}{A} = \frac{176 - 0,8 (50,7 + 2 \times 1,1)}{176} = 0,76$$

$$Q = Q_s Q_a = 0,63 \times 0,76 = 0,48$$

- Cálculo da tensão admissível F_a

$$\frac{K L}{r} = 121 < \frac{C_c}{\sqrt{Q}} = \frac{2 \pi^2 E / F_y}{\sqrt{Q}} = \frac{\sqrt{2 \pi^2 210000 / 232}}{\sqrt{0,48}} = 193$$

$$F_a = \frac{1}{1,92} \left[Q F_y - \frac{(Q F_y)^2}{4 \pi^2 E} \left(\frac{K L}{r} \right)^2 \right] = \quad (VI.13)'$$

$$= \frac{1}{1,92} \left[111,4 - \frac{(111,4)^2}{4 \pi^2 210000} 121^2 \right] = 46,6 \text{ MPa}$$

$$\text{Carga admissível } P_a = 8,2 \text{ kN}$$

Dimensionamento pela norma AS1538

Cálculo de Q (sem redução de tensão no enrijecedor) [23]

$$\frac{b_e}{t} = \frac{664}{\sqrt{0,6 \times 232}} \left[1 - \frac{145}{50 \sqrt{0,6 \times 232}} \right] = 42,4$$

$$b_e = 33,9 \text{ mm}$$

flange

$$b_e = 40,6 \text{ mm}$$

$$Q = \frac{176 - 0,8 (59,4 + 2 \times 6,1)}{176} = 0,67$$

- Cálculo da tensão admissível

$$F_{oc} = \frac{\pi^2 E I}{L^2 A} = \frac{\pi^2 210000 \times 48103}{2000^2 176} = 141,6 \text{ MPa}$$

$$Q F_y = 0,67 \times 232 = 156,5 \text{ MPa}$$

$$\eta = 0,25 \frac{Q F_y}{F_{oc}} = 0,25 \times \frac{156,5}{141,6} = 0,27$$

Substituindo-se estes valores na equação (VI.15) obtêm-se

$$F_a = 53,4 \text{ MPa} \quad \therefore \quad P_a = 9,4 \text{ kN}$$

Dimensionamento pela CS136

- Cálculo de F_a

$$F_p = \frac{\pi^2 E}{1,92 (K l/r)^2} = \frac{\pi^2 210000}{1,92 \times 121^2} = 73,7 \text{ MPa} \quad (\text{VI.17})'$$

$$\frac{F}{2} = \frac{232}{1,6 \times 2} = 72,5 \quad \therefore \quad F_p > F/2$$

$$F_a = F - \frac{F^2}{4 F_p} = 145 - \frac{145^2}{4 \times 73,7} = 73,7 \text{ MPa}$$

- Cálculo de Q

enrijecedor

$$0,37 \sqrt{E/1,6 F_a} < \frac{w}{t} = 25 < 0,84 \sqrt{E/1,6 F_a}$$

Utilizando a equação (VI.19) obtêm-se

$$Q_s = 1,37 \left[1 - 0,725 \times 25 \sqrt{\frac{1,6 \times 73,7}{210000}} \right] = 0,78$$

alma e flange

$$\frac{b_e}{t} = \frac{1,64 \sqrt{E}}{\sqrt{Q_s 1,6 F_a}} = \frac{1,64 \sqrt{210000}}{\sqrt{0,78 \times 1,6 \times 73,7}} = 78,3$$

$$b_e = 62,6 \text{ mm}$$

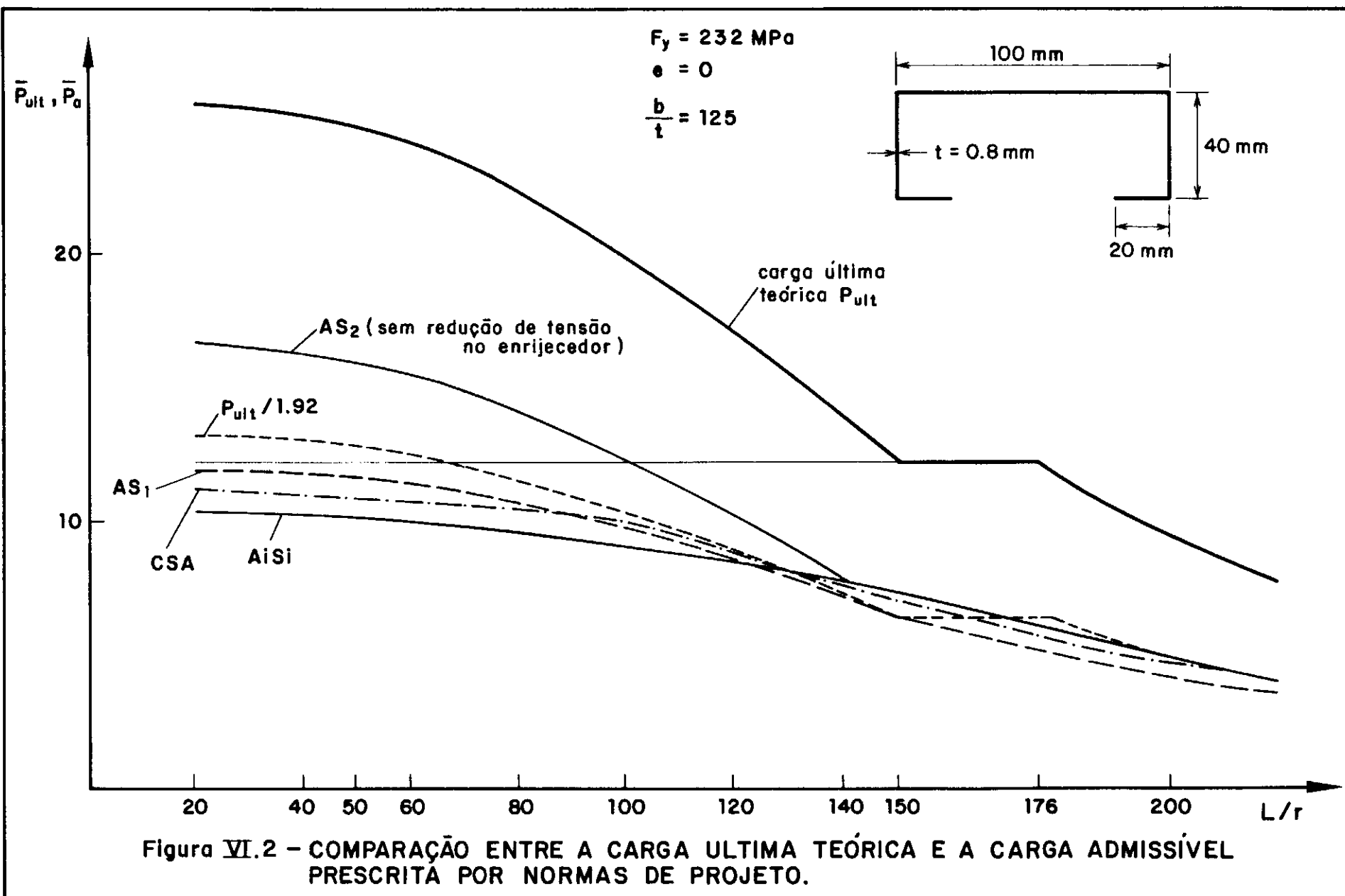
$$Q_a = \frac{176 - 0,8 (37,4)}{176} = 0,83$$

$$Q = Q_s Q_a = 0,78 \times 0,83 = 0,65$$

- Carga admissível

$$P_a = Q F_a A = 0,65 \times 73,7 \times 176 = 8400 \text{ N} = 8,4 \text{ kN}$$

A Figura (VI.2) mostra a variação da carga admissível P_a com o índice de esbeltez L/r , para uma coluna de seção transversal, com geometria dada na mesma figura, de acordo com as diferentes normas estudadas. Esta figura mostra também a carga última teórica obtida neste trabalho, reduzida pelo coeficiente de segurança adotado na norma AISI ($\gamma = 1,92$).



Para a Norma Australiana AS1538 são mostradas duas curvas: 'AS₁' para o coeficiente Q calculado com a equação (VI.12) e 'AS₂' para $Q = Q_a$, isto é, sem redução de tensão no enrijecedor, conforme comentado anteriormente na seção (VI.3).

Para índices de esbeltez $L/r > 120$ (colunas longas) os valores da carga admissível fornecidos pelas normas são bastante próximos, inclusive no trecho de comportamento instável ($150 < L/r < 176$). Para colunas muito longas utilizam-se, na verdade as equações gerais de coluna sem redução devida à flambagem local ($Q = 1$).

No trecho relativo a colunas curtas e médias ($L/r < 120$) os valores de carga admissível dados pelas normas se afastam. Em particular, a curva da Norma Australiana AS₂ (sem redução de tensão no enrijecedor) dá valores bastante superiores aos das outras curvas. Comparando-se estas últimas curvas (AS₁, AISI, CSA) com aquela de carga última teórica, dividida pelo coeficiente de segurança 1,92, conclui-se que, para este trecho, as normas correspondentes fornecem valores bastante conservadores no que diz respeito à segurança contra o colapso. Entretanto, considerando-se que é indesejável a ocorrência de flambagem local pode-se dizer (as curvas situam-se abaixo deste limite) que as normas fornecem valores de tensão admissível satisfatórios para a seção-tipo adotada.

A curva AS₂, correspondente a utilização da Norma Australiana, de acordo com a sugestão de Hancock (sem redução no enrijecedor), baseada na referência [22], indica um dimensionamento não seguro. Nesta referência, Rhodes e Loughlan desprezaram a redução de área do enrijecedor e da alma da seção U enrijecida, apoiados no fato de que estes dois elementos, se comparados ao

flange, ficam praticamente indeformados. Mas, contrariamente a Norma Australiana, Rhodes e Loughlan propõem um método de dimensionamento filosoficamente correto, baseados na equação (V.28), reduzindo somente a área do flange. Os resultados assim obtidos se revelaram precisos quando comparados a resultados experimentais. O que se conclui aqui, é que a sugestão de Hancock, embora justificada teoricamente, não se aplica a Norma Australiana que, como as outras duas, não leva em conta adequadamente a interação local-global.

A Figura (VI.3) apresenta uma comparação entre a curva de carga última teórica, resultados experimentais e curvas de carga admissível de projeto em função de L/r , sendo r uma função de b_w . O enrijecedor não teve sua tensão reduzida ($b_1/t = 10,4 \approx 0,37 \sqrt{E/F_y}$) e por isso as curvas de AS1538 correspondentes a AS_1 e AS_2 da Figura (VI.2) são coincidentes. Observa-se que para estas seções, cuja esbeltez é bem menor do que a da seção da figura anterior, as normas conduzem a dimensionamentos conservadores tanto no que se refere ao colapso quanto a ocorrência de flambagem local.

Pode-se dizer então, que para seções muito esbeltas, as normas dão resultados apenas moderadamente conservadores, enquanto que para seções de esbeltez média os resultados podem ser extremamente conservadores.

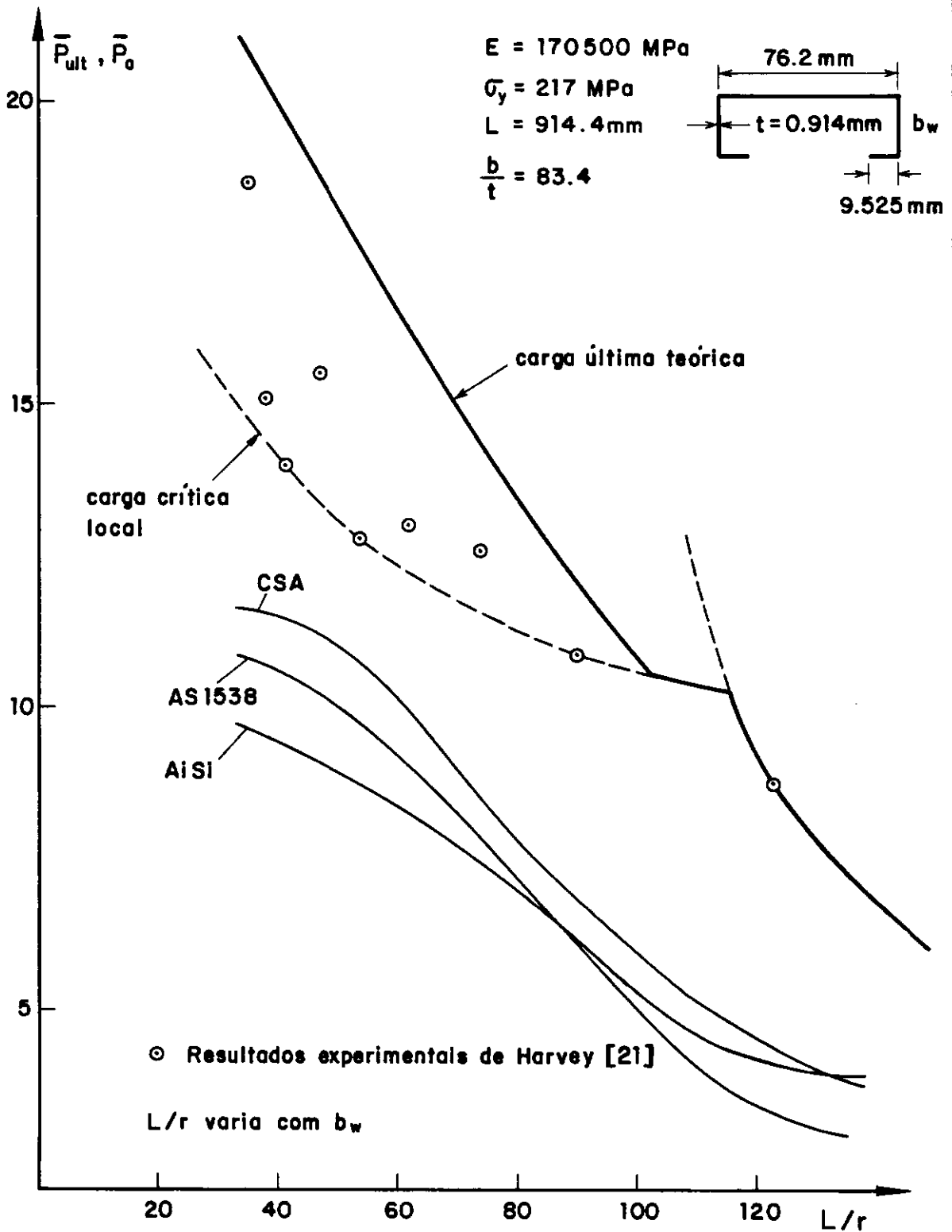


Figura VI.3 - COMPARAÇÃO ENTRE A CARGA ADMISSÍVEL PRESCRITA POR NORMAS DE PROJETO E RESULTADOS TEÓRICOS E EXPERIMENTAIS.

CAPÍTULO VII

COMENTÁRIOS FINAIS

Apresentou-se neste trabalho uma análise do comportamento pós-crítico de colunas esbeltas através da aplicação do método de energia a nível local, considerando a deformabilidade da seção transversal, e do método de equilíbrio a nível global para a coluna como um todo. Mostrou-se que a interação não-linear entre os modos local e global de flexão nessas colunas, formadas por associação de placas esbeltas, conduz a uma redução na carga de colapso.

A análise dos resultados aqui obtidos evidenciou algumas características importantes do comportamento estrutural das colunas em questão:

a) a flambagem local provoca uma redistribuição das tensões internas que, aliada ao acoplamento deste modo local com o global, acarreta uma perda de rigidez axial e de flexão da coluna;

b) as respostas pós-críticas são estáveis apenas nos casos em que a carga crítica local é inferior à carga crítica de

Euler reduzida ($P_L < P_E^*$) e instáveis nos outros casos;

c) o comportamento pós-crítico não é afetado pelo sinal das deflexões no modo local;

d) nas seções U enrijecidas correntes, o flange é o elemento mais afetado pelo processo não-linear pós-crítico local;

e) a excentricidade de carga tem efeito equivalente ao de imperfeições no modo global e conduz a cargas críticas que são menores do que aquela para coluna sob carga centrada quando a excentricidade é na direção do flange e maiores quando a excentricidade é na direção do enrijecedor.

As aproximações adotadas para a presente análise revelaram, através de comparação com outra mais refinada, serem suficientes para demonstrar o mecanismo não-linear de flambagem, além de serem válidas para o cálculo de cargas críticas e de colapso de colunas constituídas de aço comum.

As prescrições das normas americana AISI, a australiana AS1538 e canadense S136 conduzem a um dimensionamento seguro. Para colunas curtas e medianamente longas, os resultados são satisfatórios quando a esbeltez da seção é elevada, entretanto são conservadores, quando comparados aos resultados teóricos e alguns experimentais, para seções com esbeltez média.

Alguns tópicos podem ser citados como de interesse na continuação desta linha de pesquisa:

a) a combinação de dois modos pós-críticos para estudo de colunas constituídas de aço de alta resistência;

b) a consideração dos efeitos de dobragem a frio.

A variação da tensão de escoamento ao longo da seção pode invalidar o critério de estimativa de colapso função da tensão de escoamento na junção flange-alma;

c) o estudo da influência das imperfeições no modo local;

d) a interação não-linear entre os modos local e global de flexo-torção.

APÊNDICE A

RESULTADOS DAS INTEGRAIS APRESENTADAS NAS EQUAÇÕES (IV.5) A (IV.9)

Placa 1

$$\int_0^{b_f} Y_1^2 dy_1 = A_1^2 J_{1,1} + 2 A_1 A_2 J_{1,2} + A_2^2 J_{1,3} \quad (A.1)$$

onde

$$J_{1,1} = \left[\frac{8}{15} - 2 \xi_1 \frac{64}{105} + \xi_1^2 \frac{32}{45} \right] b_f$$

$$J_{1,2} = \left[\frac{64}{105} - \frac{40}{63} \xi_2 - \frac{32}{45} \xi_1 + \frac{288}{385} \xi_1 \xi_2 \right] b_f$$

$$J_{1,3} = \left[\frac{32}{45} - 2 \xi_2 \frac{288}{385} + \frac{72}{91} \xi_2^2 \right] b_f$$

$$\int_0^{b_f} Y_1''^2 dy_1 = A_1^2 P_{1,1} + 2 A_1 A_2 P_{1,2} + A_2^2 P_{1,3} \quad (A.2)$$

onde

$$P_{1,1} = \left[4 - 16 \xi_1 + \frac{144}{5} \xi_1^2 \right] / b_f^3$$

$$P_{1,2} = \left[8 - \frac{60}{5} \xi_2 - \frac{144}{5} \xi_1 + \frac{360}{7} \xi_1 \xi_2 \right] / b_f^3$$

$$P_{1,3} = \left[\frac{144}{5} - 2 \xi_2 \frac{360}{7} + 100 \xi_2^2 \right] / b_f^3$$

$$\int_0^{b_f} Y_1 Y_1'' dy_1 = A_1^2 I_{1,1} + 2 A_1 A_2 I_{1,2} + A_2^2 I_{1,3} \quad (A.3)$$

onde

$$I_{1,1} = \left[-\frac{4}{3} + \frac{16}{5} \xi_1 - \frac{16}{7} \xi_1^2 \right] / b_f$$

$$I_{1,2} = \left[-\frac{48}{15} + 2 \xi_1 \frac{16}{7} + \frac{24}{7} \xi_2 - \frac{48}{9} \xi_1 \xi_2 \right] / 2 b_f$$

$$I_{1,3} = \left[-\frac{16}{7} + \frac{48}{9} \xi_2 - \frac{36}{11} \xi_2^2 \right] / b_f$$

$$\int_0^{b_f} Y_1'^2 dy_1 = A_1^2 H_{1,1} + 2 A_1 A_2 H_{1,2} + A_2^2 H_{1,3} \quad (A.4)$$

onde

$$H_{1,1} = \left[\frac{4}{3} + \frac{16}{7} \xi_1^2 - \frac{16}{5} \xi_1 \right] / b_f$$

$$H_{1,2} = \left[\frac{8}{5} - \frac{12}{7} \xi_2 - \frac{16}{7} \xi_1 + \frac{24}{9} \xi_1 \xi_2 \right] / b_f$$

$$H_{1,3} = \left[\frac{16}{7} - \frac{48}{9} \xi_2 + \frac{36}{11} \xi_2^2 \right] / b_f$$

Placa 2

$$\int_0^{b_w} Y_2^2 dy_2 = A_1^2 J_{2,1} + 2 A_1 A_2 J_{2,2} + A_2^2 J_{2,3} \quad (A.5)$$

onde

$$J_{2,1} = \left[\frac{\mu_1^2}{3} - \frac{\mu_1 \gamma_1}{2} + \frac{\gamma_1^2}{5} + 2 \frac{\mu_1 \beta_1}{5} - \frac{\beta_1 \gamma_1}{3} + \frac{\beta_1^2}{7} \right] b_w$$

$$J_{2,2} = \left[\frac{\mu_1 \mu_2}{3} - \frac{\mu_1 \gamma_2}{4} + \frac{\mu_1 \beta_2}{6} - \frac{\mu_2 \gamma_1}{4} + \frac{\gamma_1 \gamma_2}{5} - \right. \\ \left. - \frac{\gamma_1 \beta_2}{7} + \frac{\mu_2 \beta_1}{5} - \frac{\gamma_2 \beta_1}{6} + \frac{\beta_1 \beta_2}{8} \right] b_w$$

$$J_{2,3} = \left[\frac{\mu_2^2}{3} - \frac{\mu_2 \gamma_2}{2} + \frac{\gamma_2^2}{5} + \frac{\mu_2 \beta_2}{3} - 2 \frac{\beta_2 \gamma_2}{7} + \frac{\beta_2^2}{9} \right] b_w$$

$$\int_0^{b_w} Y_2'^2 dy_2 = A_1^2 P_{2,1} + 2 A_1 A_2 P_{2,2} + A_2^2 P_{2,3} \quad (A.6)$$

onde

$$P_{2,1} = [4 \gamma_1^2 - 12 \beta_1 \gamma_1 + 12 \beta_1^2]/b_w^3$$

$$P_{2,2} = [4 \gamma_1 \gamma_2 - 8 \gamma_1 \beta_2 - 6 \gamma_2 \beta_1 + 18 \beta_1 \beta_2]/b_w^3$$

$$P_{2,3} = [4 \gamma_2^2 - 16 \gamma_2 \beta_2 + \frac{144}{5} \beta_2^2]/b_w$$

$$\int_0^{b_w} \gamma_2 \gamma_2'' dy_2 = A_1^2 I_{2,1} + 2 A_1 A_2 I_{2,2} + A_2^2 I_{2,3} \quad (A.7)$$

onde

$$I_{2,1} = [-\gamma_1 \mu_1 + 2 \mu_1 \beta_1 + \frac{2}{3} \gamma_1^2 - 2 \beta_1 \gamma_1 + \frac{6}{5} \beta_1^2]/b_w$$

$$I_{2,2} = [-\gamma_2 \mu_1 + 3 \mu_1 \beta_2 + \frac{4}{3} \gamma_1 \gamma_2 - \frac{14}{5} \gamma_1 \beta_2 - 2 \gamma_2 \beta_1 + \\ + 3 \beta_1 \beta_2 - \gamma_1 \mu_2 + 2 \mu_2 \beta_1]/(2 b_w)$$

$$I_{2,3} = -\mu_2 \gamma_2 + 3 \mu_2 \beta_2 + \frac{2}{3} \gamma_2^2 - \frac{14}{5} \gamma_2 \beta_2 + \frac{12}{7} \beta_2^2$$

$$\int_0^{b_w} \gamma_2'^2 dy_2 = A_1^2 H_{2,1} + 2 A_1 A_2 H_{2,2} + A_2^2 H_{2,3} \quad (A.8)$$

onde

$$H_{2,1} = [\mu_1^2 - 2 \mu_1 \gamma_1 + \frac{4}{3} \gamma_1^2 + 2 \mu_1 \beta_1 - 3 \gamma_1 \beta_1 + \frac{9}{5} \beta_1^2]/b_w$$

$$H_{2,2} = [\mu_1 \mu_2 - \gamma_2 \mu_1 + \mu_1 \beta_2 - \gamma_1 \mu_2 + \frac{4}{3} \gamma_1 \gamma_2 - \frac{8}{5} \gamma_1 \beta_2 + \\ + \mu_2 \beta_1 - \frac{3}{2} \gamma_2 \beta_1 + 2 \beta_1 \beta_2] / b_w$$

$$H_{2,3} = [\mu_2^2 - 2 \mu_2 \gamma_2 + \frac{4}{3} \gamma_2^2 + 2 \mu_2 \beta_2 - \frac{16}{5} \gamma_2 \beta_2 + \\ + \frac{16}{7} \beta_2^2] / b_w$$

$$\int_0^{b_w} \gamma_2^2 y_2 dy_2 = A_1^2 N_{2,1} + 2 A_1 A_2 N_{2,2} + A_2^2 N_{2,3} \quad (A.9)$$

onde

$$N_{2,1} = \left[\frac{\mu_1^2}{4} - \frac{2}{5} \mu_1 \gamma_1 + \frac{\gamma_1^2}{6} + \frac{\mu_1 \beta_1}{3} - \frac{2}{7} \beta_1 \gamma_1 + \frac{\beta_1^2}{8} \right] b_w^2$$

$$N_{2,2} = \left[\frac{\mu_1 \mu_2}{4} - \frac{\mu_1 \gamma_2}{5} + \frac{\mu_1 \beta_2}{7} - \frac{\mu_2 \gamma_1}{5} + \frac{\gamma_1 \gamma_2}{6} - \right. \\ \left. + \frac{\gamma_1 \beta_2}{8} + \frac{\mu_2 \beta_1}{6} - \frac{\gamma_2 \beta_1}{7} + \frac{\beta_1 \beta_2}{9} \right] b_w^2$$

$$N_{2,3} = \left[\frac{\mu_2^2}{4} - \frac{2}{5} \mu_2 \beta_2 + \frac{\gamma_2^2}{6} + \frac{2}{7} \beta_2 \mu_2 - \frac{\beta_2 \gamma_2}{4} + \frac{\beta_2^2}{10} \right] b_w^2$$

Placa 3

Os coeficientes $J_{3,j}$, $P_{3,j}$, $I_{3,j}$ e $H_{3,j}$ são calculados com as expressões (A.5) a (A.8) substituindo-se

$$\mu_i \quad \text{por} \quad \rho_i$$

$$\gamma_i \quad \text{por} \quad - \Omega_i$$

$$\beta_i \quad \text{por} \quad \tau_i$$

$$b_w \quad \text{por} \quad b_l$$

APÊNDICE B

EXPRESSÕES DOS COEFICIENTES a_1 , a_2 , a_3 E a_4 DO CAPÍTULO V

Coeficiente a_1

$$a_1 = \sum_{i=1}^3 \int_0^{b_i} \gamma_{cr,i}^2 dy_i = \sum_{i=1}^3 [J_{i,1} + 2 A_0 J_{i,2} + A_0^2 J_{i,3}] \quad i = 1, 3 \quad (B.1)$$

onde $J_{i,j}$ estão definidos no Apêndice A.

Coeficiente a_2

$$\begin{aligned} a_2 = \int_0^{b_f} \gamma_{cr,1}^2 dy_1 + \int_0^{b_w} \gamma_{cr,2}^2 \frac{y_2}{b_w} dy_2 = J_{1,1} + \frac{N_{2,1}}{b_w} + \\ + 2 A_0 \left[J_{1,2} + \frac{N_{2,2}}{b_w} \right] + A_0^2 \left[J_{1,3} + \frac{N_{2,3}}{b_w} \right] \end{aligned} \quad (B.2)$$

onde $J_{1,j}$ e $N_{2,j}$ estão definidos no Apêndice A.

Coeficiente a_3

$$\begin{aligned}
 a_3 &= \frac{S^4 t^2}{3 (1 - \nu^2) \pi^4} \sum_{i=1}^3 \int_0^{b_i} \left[(Y''_{cr,i} - \left(\frac{\pi}{S}\right)^2 Y_{cr,i})^2 + \right. \\
 &\quad \left. + 2 \frac{\pi^2}{S^2} (1 - \nu) (Y_{cr,i} Y''_{cr,i} + Y'^2_{cr,i}) \right] dy_i = \\
 &= \frac{S^4 t^2}{3 (1 - \nu^2) \pi^4} [a_{3,1} + 2 A_0 a_{3,2} + A_0^2 a_{3,3}]
 \end{aligned} \tag{B.3}$$

onde

$$\begin{aligned}
 a_{3,j} &= \sum_{i=1}^3 \left[\left(\frac{\pi}{S}\right)^4 J_{i,j} - 2 \left(\frac{\pi}{S}\right)^2 I_{i,j} + P_{i,j} + 2 (1 - \nu) \left(\frac{\pi}{S}\right)^2 \right. \\
 &\quad \left. (I_{i,j} + H_{i,j}) \right]
 \end{aligned}$$

e $J_{i,j}$, $I_{i,j}$, $P_{i,j}$ e $H_{i,j}$ estão definidos no Apêndice A

Coeficiente a_4

$$\begin{aligned}
 a_4 &= \sum_{i=1}^3 \int_0^{b_i} \left\{ Y^4_{cr,i} + \frac{8 S^2}{E^2 \pi^4} [F''_{i2} - \left(\frac{2 \pi}{S}\right)^2 F_{i2}]^2 \right\} dy_i \tag{B.4} \\
 &- \text{expressão de } \int_0^{b_i} Y^4_{cr,i} dy_i
 \end{aligned}$$

Placa 1

$$\begin{aligned}
 \int_0^{b_f} Y^4_{cr,1} dy_1 &= \int_0^{b_f} [Y^4_{1,1} + 4 A_0 Y^3_{1,1} Y_{1,2} + 6 A_0^2 Y^2_{1,1} Y^2_{1,2} + \\
 &\quad + 4 A_0^3 Y_{1,1} Y^3_{1,2} + A_0^4 Y^4_{1,2}] dy_1
 \end{aligned} \tag{B.5}$$

$$\int_0^{b_f} Y_{1,1}^4 dy_1 = b_f \left[\frac{384}{945} - 4 \xi_1 \frac{512}{1155} + 6 \xi_1^2 \frac{22016}{45045} - \right. \\ \left. - 4 \xi_1^3 \frac{40960}{75075} + \xi_1^4 \frac{2168}{3315} \right] \quad (\text{B.6})$$

$$\int_0^{b_f} Y_{1,1}^3 Y_{1,2} dy_1 = b_f \left[\frac{512}{1155} - \xi_2 \frac{6784}{15015} - 3 \xi_2 \frac{22016}{45045} + \right. \\ + 3 \xi_1 \xi_2 \frac{18432}{36855} + 3 \xi_1^2 \frac{40960}{75075} - \\ - 3 \xi_1^2 \xi_2 \frac{1441857}{2297295} - \xi_1^3 \frac{2168}{3315} + \\ \left. + \xi_1^3 \xi_2 \frac{182272}{285285} \right] \quad (\text{B.7})$$

$$\int_0^{b_f} Y_{1,1}^2 Y_{1,2}^2 dy_1 = b_f \left[\frac{22016}{45045} - 2 \xi_2 \frac{18432}{36855} - 2 \xi_1 \frac{40960}{75075} + \right. \\ + 4 \xi_1 \xi_2 \frac{1441857}{2297295} + \xi_2^2 \frac{1177728}{2297295} - \\ - 2 \xi_2^2 \xi_1 \frac{25231872}{43648605} + \xi_1^2 \frac{2168}{3315} - \\ \left. - 2 \xi_1^2 \xi_2 \frac{182272}{285285} + \xi_1^2 \xi_2^2 \frac{4566528}{6891885} \right] \quad (\text{B.8})$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{b_f} Y_{1,1} Y_{2,1}^3 dy_1 = b_f \left[\frac{40960}{75075} - \xi_1 \frac{2168}{3315} - 3 \xi_2 \frac{1441857}{2297295} + \right. \\
+ 3 \xi_1 \xi_2 \frac{182272}{285285} + 3 \xi_2^2 \frac{25231872}{43648605} - \\
- 3 \xi_1 \xi_2^2 \frac{4566528}{6891885} - \xi_2^3 \frac{15488}{25935} + \\
\left. + \xi_1 \xi_2^3 \frac{25629696}{37182145} \right]
\end{aligned}
\tag{B.9}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{b_f} Y_{1,2}^4 dy_1 = b_f \left[\frac{2168}{3315} - 4 \xi_2 \frac{182272}{285285} + 6 \xi_2^2 \frac{4566528}{6891885} - \right. \\
- 4 \xi_2^3 \frac{25629696}{37182145} + \xi_2^4 \frac{31104}{43225} \left. \right]
\end{aligned}
\tag{B.10}$$

Placa 2

$$\begin{aligned}
\int_0^{b_w} Y_{cr,2}^4 dy_2 = \int_0^{b_w} [Y_{2,1}^4 + 4 A_0 Y_{2,1}^3 Y_{2,2} + 6 A_0^2 Y_{2,1}^2 Y_{2,2}^2 + \\
+ 4 A_0^3 Y_{2,1} Y_{2,2}^3 + A_0^4 Y_{2,2}^4] dy_2
\end{aligned}
\tag{B.11}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{b_w} \gamma_{2,1}^4 dy_2 &= b_w \left[\frac{\mu_1^4}{5} - \frac{2}{3} \mu_1^3 \gamma_1 + \frac{1}{7} (6 \mu_1^2 \gamma_1^2 + 4 \mu_1^3 \beta_1) - \right. \\
&\quad - \frac{1}{2} (\mu_1 \gamma_1^3 + 3 \gamma_1 \mu_1^2 \beta_1) + \frac{1}{9} (6 \mu_1^2 \beta_1^2 + \gamma_1^4 + \\
&\quad + 12 \gamma_1^2 \mu_1 \beta_1) + \frac{1}{10} (-12 \mu_1 \gamma_1 \beta_1^2 - 4 \gamma_1^3 \beta_1) + \\
&\quad \left. + \frac{1}{11} (4 \mu_1 \beta_1^3 + 6 \gamma_1^2 \beta_1^2) - \frac{1}{3} \gamma_1 \beta_1^3 + \frac{1}{13} \beta_1^4 \right]
\end{aligned}
\tag{B.12}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{b_w} \gamma_{2,1}^3 \gamma_{2,2} dy_2 &= b_w \left[\frac{1}{5} \mu_1^3 \mu_2 - \frac{1}{6} (\mu_1^3 \gamma_2 + 3 \mu_1^2 \gamma_1 \mu_2) + \right. \\
&+ \frac{1}{7} (3 \mu_1^2 \gamma_1 \gamma_2 + 3 \mu_1^2 \beta_1 \mu_2 + 3 \mu_1 \gamma_1^2 \mu_2) + \\
&+ \frac{1}{8} (\mu_1^3 \beta_2 - 3 \mu_1^2 \beta_1 \gamma_2 - 3 \mu_1 \gamma_1^2 \gamma_2 - 6 \mu_1 \gamma_1 \beta_1 \mu_2 - \\
&- \gamma_1^3 \mu_2) + \frac{1}{9} (-3 \mu_1^2 \gamma_1 \beta_2 + 6 \mu_1 \gamma_1 \beta_1 \gamma_2 + 3 \mu_1 \beta_1^2 \mu_2 + \\
&+ \gamma_1^3 \gamma_2 + 3 \gamma_1^2 \beta_1 \mu_2) + \frac{1}{10} (3 \mu_1^2 \beta_1 \beta_2 + 3 \mu_1 \gamma_1^2 \beta_2 - \\
&- 3 \mu_1 \beta_1^2 \gamma_2 - 3 \gamma_1^2 \beta_1 \gamma_2 - 3 \gamma_1 \beta_1^2 \mu_2) + \\
&+ \frac{1}{11} (-6 \mu_1 \gamma_1 \beta_1 \beta_2 - \gamma_1^3 \beta_2 + 3 \gamma_1 \beta_1^2 \gamma_2 + \beta_1^3 \mu_2) + \\
&+ \frac{1}{12} (3 \mu_1 \beta_1^2 \beta_2 + 3 \gamma_1^2 \beta_1 \beta_2 - \beta_1^3 \gamma_2) + \\
&\left. + \frac{1}{13} (-3 \gamma_1 \beta_1^2 \beta_2) + \frac{1}{14} \beta_1^3 \beta_2 \right]
\end{aligned}$$

(B.13)

$$\begin{aligned}
\int_0^{b_W} \gamma_{2,1}^2 \gamma_{2,2}^2 dy_2 = b_W \bigg[& \frac{1}{5} \mu_1^2 \mu_2^2 - \frac{1}{3} (\mu_1^2 \mu_2 \gamma_2 + \mu_1 \gamma_1 \mu_2^2) + \frac{1}{7} (\mu_1^2 \gamma_2^2 + \\
& + 4 \mu_1 \mu_2 \gamma_1 \gamma_2 + 2 \mu_1 \beta_1 \mu_2^2 + \gamma_1^2 \mu_2^2) + \frac{1}{4} (\mu_1^2 \mu_2 \beta_2 - \\
& - \mu_1 \gamma_1 \gamma_2^2 - 2 \mu_1 \beta_1 \mu_2 \gamma_2 - \gamma_1^2 \mu_2 \gamma_2 - \gamma_1 \beta_1 \mu_2^2) + \\
& + \frac{1}{9} (-2 \mu_1^2 \gamma_2 \beta_2 - 4 \mu_1 \gamma_1 \mu_2 \beta_2 + 2 \mu_1 \beta_1 \gamma_2^2 + \\
& + \gamma_1^2 \gamma_2^2 + 4 \gamma_1 \beta_1 \mu_2 \gamma_2 + \beta_1^2 \mu_2^2) + \frac{1}{5} (2 \gamma_1 \mu_1 \gamma_2 \beta_2 + \\
& + 2 \mu_1 \mu_2 \beta_1 \beta_2 + \gamma_1^2 \mu_2 \beta_2 - \gamma_1 \beta_1 \gamma_2^2 - \beta_1^2 \mu_2 \gamma_2) + \\
& + \frac{1}{11} (\mu_1^2 \beta_2^2 - 4 \mu_1 \beta_1 \gamma_2 \beta_2 - 2 \gamma_1^2 \gamma_2 \beta_2 - \\
& - 4 \gamma_1 \beta_1 \mu_2 \beta_2 + \beta_1^2 \gamma_2^2) + \frac{1}{6} (-\mu_1 \gamma_1 \beta_2^2 + \\
& + 2 \gamma_1 \gamma_2 \beta_1 \beta_2 + \beta_1^2 \mu_2 \beta_2) + \frac{1}{13} (2 \mu_1 \beta_1 \beta_2^2 + \gamma_1^2 \beta_2^2 - \\
& - 2 \beta_1^2 \gamma_2 \beta_2) - \frac{1}{7} (\gamma_1 \beta_1 \beta_2^2) + \frac{1}{15} \beta_1 \beta_2^2 \bigg]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{b_w} \gamma_{2,1} \gamma_{2,2}^3 dy_2 &= b_w \left[\frac{1}{5} \mu_1 \mu_2^3 - \frac{1}{6} (3 \mu_1 \gamma_2 \mu_2^2 + \gamma_1 \mu_2^3) + \right. \\
&+ \frac{1}{7} (3 \mu_1 \mu_2 \gamma_2^2 + 3 \gamma_1 \gamma_2 \mu_2^2 + \mu_2^3 \beta_1) + \\
&+ \frac{1}{8} (3 \mu_1 \mu_2^2 \beta_2 - 3 \gamma_1 \mu_2 \gamma_2^2 - 3 \beta_1 \gamma_2 \mu_2^2) + \\
&+ \frac{1}{3} (-2 \mu_1 \mu_2 \gamma_2 \beta_2 - \gamma_1 \mu_2^2 \beta_2 + \beta_1 \mu_2 \gamma_2^2) + \\
&+ \frac{1}{10} (6 \mu_2 \gamma_1 \gamma_2 \beta_2 + 3 \beta_1 \mu_2^2 \beta_2) + \frac{1}{11} (3 \mu_1 \mu_2 \beta_2^2 - \\
&- 6 \mu_2 \gamma_2 \beta_1 \beta_2) - \frac{1}{4} \gamma_1 \beta_2^2 \mu_2 + \frac{3}{13} \beta_1 \beta_2^2 \mu_2 + \\
&+ \left. \frac{1}{14} \mu_1 \beta_2^3 - \frac{1}{15} \gamma_1 \beta_2^3 + \frac{1}{16} \beta_1 \beta_2^3 \right]
\end{aligned}
\tag{B.15}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{b_w} \gamma_{2,2}^4 dy_2 &= b_w \left[\frac{\mu_2^4}{5} - \frac{2}{3} \mu_2^3 \gamma_2 + \frac{6}{7} \mu_2^2 \gamma_2^2 + \frac{1}{2} (-\gamma_2^3 \mu_2 + \mu_2^3 \beta_2) + \right. \\
&+ \frac{1}{9} (-12 \mu_2^2 \gamma_2 \beta_2 + \gamma_2^4) + \frac{12}{10} \mu_2 \gamma_2^2 \beta_2 + \frac{1}{11} (6 \beta_2^2 \mu_2^2 - \\
&- 4 \gamma_2^3 \beta_2) - \gamma_2 \mu_2 \beta_2^2 + \frac{6}{13} \gamma_2^2 \beta_2^2 + \frac{4}{14} \mu_2 \beta_2^3 - \frac{4}{15} \gamma_2 \beta_2^3 + \\
&+ \left. \frac{1}{16} \beta_2^4 \right]
\end{aligned}
\tag{B.16}$$

As expressões para C_j e K_1 encontram-se no capítulo III.

$$\begin{aligned}
 \int_0^{b_f} F_{12}'' dy_1 = & \sum_{i=3}^{11,2} \sum_{j=3}^{11,2} (i-2)(i-1)(j-2)(j-1) C_i C_j \frac{y_1^{i+j-5}}{(i+j-5)} + \\
 & + 2 \sum_{i=3}^{11,2} (i-2)(i-1) C_i \{ K_1 G [e^{Gb_f} X(i-3, b_f, G) - \\
 & - X(i-3, 0, G)] + K_2 [e^{Gb_f} 2 X(i-3, b_f, G) + \\
 & + G e^{Gb_f} X(i-2, b_f, G) - 2 X(i-3, 0, G) - G X(i-2, 0, G)] - \\
 & - K_3 G [e^{-Gb_f} X(i-3, b_f, -G) - X(i-3, 0, -G)] + \\
 & + K_4 [e^{-Gb_f} 2 X(i-3, b_f, -G) - G e^{-Gb_f} X(i-2, b_f, -G) - \\
 & - 2 X(i-3, 0, -G) + G X(i-2, 0, -G)] \} + \frac{K_1^2}{2} G^3 (e^{2Gb_f} - 1) + \\
 & + K_1 K_2 G^2 [2 e^{2Gb_f} + G e^{2Gb_f} X(1, b_f, 2G) - 2 - \\
 & - G X(1, 0, 2G)] + 2 K_1 K_3 G^4 b_f - 2 K_1 K_4 G^3 (2 b_f - G \frac{b_f^2}{2}) + \\
 & + \frac{K_2^2}{2} G [e^{2Gb_f} (4 + 4 G X(1, b_f, 2G) + G^2 X(2, b_f, 2G)) - \\
 & - 4 - 4 G X(1, 0, 2G) - G^2 X(2, 0, 2G)] + 2 K_2 K_3 G^3 (2 b_f + \\
 & + G \frac{b_f^2}{2}) - 2 K_2 K_4 G^2 (4 b_f - G^2 \frac{b_f^3}{3}) - \frac{K_3^2}{2} G^3 (e^{-2Gb_f} - 1) + \\
 & + K_3 K_4 G^2 [2 e^{-2Gb_f} - G e^{-2Gb_f} X(1, b_f, -2G) - 2 + \\
 & + G X(1, 0, -2G)] - \frac{K_4^2}{2} G [e^{-2Gb_f} (4 - 4 G X(1, b_f, -1G) + \\
 & + G^2 X(2, b_f, -2G)) - 4 + 4 G X(1, 0, -2G) - G^2 X(2, 0, -2G)] \\
 & (B.18)
 \end{aligned}$$

Placa 3

$$\int_0^{b_1} Y_{cr,3}^4 dy_3 = \int_0^{b_1} [Y_{3,1}^4 + 4 A_0 Y_{3,1}^3 Y_{3,2} + 6 A_0^2 Y_{3,1}^2 Y_{3,2}^2 +$$

$$+ 4 A_0^3 Y_{3,1} Y_{3,2}^3 + A_0^4 Y_{3,2}^4] dy_3$$

(B.17)

Estas integrais são calculadas com as mesmas expressões da placa 2 com as seguintes substituições:

$$\mu_i \text{ por } \rho_i$$

$$\gamma_i \text{ por } -\Omega_i$$

$$\beta_i \text{ por } \tau_i$$

$$b_w \text{ por } b_1$$

$$- \text{ expressão de } \int_0^{b_i} F_{i2}''^2 dy_i$$

Placa 1

$$F_{12}'' = \sum_{j=3}^{11,2} [(j-1)(j-2) C_j y_1^{(j-3)}] + K_1 G^2 e^{Gy_1} +$$

$$+ K_2 e^{Gy_1} G (2 + G y_1) + K_3 G^2 e^{-Gy_1} - K_4 G e^{-Gy_1} (2 - G y_1)$$

onde

$$C_j = C_{j,1} + A_0 C_{j,2} + A_0^2 C_{j,3} \quad j = 1, 11, 2$$

$$K_l = K_{l,1} + A_0 K_{l,2} + A_0^2 K_{l,3} \quad l = 1, 4$$

onde

$$X(m, B, a) = B^m - B^{m-1} \frac{m}{a} + B^{m-2} \frac{m(m-1)}{a^2} + \dots + (-1)^m \frac{m!}{a^m} \quad (B.19)$$

Placas 2 e 3

$$\int F_{22}''^2 dy_2$$

$$\int F_{32}''^2 dy_2$$

Utilizar a mesma expressão da placa 1 com as seguintes substituições:

placa 1		placa 2		placa 3
C_i	por	D_i	e	E_i
K_1		K_5		K_9
K_2		K_6		K_{10}
K_3		K_7		K_{11}
K_4		K_8		K_{12}
b_f		b_w		b_l

(B.20)

- expressão de $\int_0^{b_i} F_{i2} F_{i2}'' dy_2$

Placa 1

$$\begin{aligned}
\int_0^{b_f} F_{21} F_{21}'' dy_1 &= \sum_{i=1}^{11,2} \sum_{j=3}^{11,2} (j-2)(j-1) c_i c_j \frac{y_1^{i+j-3}}{i+j-3} + \\
&+ \sum_{i=1}^{11,2} c_i \{K_1 G [e^{Gb_f} X(i-1, b_f, G) - X(i-1, 0, G)] + \\
&+ K_2 [2 e^{Gb_f} X(i-1, b_f, G) + e^{Gb_f} G X(i, b_f, G) - \\
&- 2 X(i-1, 0, G) - G X(i, 0, G)] - \\
&- K_3 G [e^{-Gb_f} X(i-1, b_f, -G) - X(i-1, 0, -G)] + \\
&+ K_4 [2 e^{-Gb_f} X(i-1, b_f, -G) - e^{-Gb_f} G X(i, b_f, -G) - \\
&- 2 X(i-1, 0, -G) + G X(i, 0, -G)]\} + \\
&+ \sum_{i=3}^{11,2} (i-1)(i-2) c_i \left\{ \frac{K_1}{G} [e^{Gb_f} X(i-3, b_f, G) - \right. \\
&- X(i-3, 0, G)] + \frac{K_2}{G} [e^{Gb_f} X(i-2, b_f, G) - X(i-2, 0, G)] \\
&- \frac{K_3}{G} [e^{-Gb_f} X(i-3, b_f, -G) - X(i-3, 0, -G)] - \\
&- \frac{K_4}{G} [e^{-Gb_f} X(i-2, b_f, -G) - X(i-2, 0, -G)] \} + \\
&+ K_1^2 \frac{G}{2} [e^{2Gb_f} - 1] + K_1 K_2 [e^{2Gb_f} + G e^{2Gb_f} X(1, b_f, 2G) - \\
&- 1 - G X(1, 0, 2G)] + 2 K_1 K_3 G^2 b_f + 2 K_1 K_4 (-G b_f + G^2 \frac{b_f^2}{2}) \\
&+ \frac{K_2^2}{2} [e^{2Gb_f} 2 X(1, b_f, 2G) + e^{2Gb_f} G X(2, b_f, 2G) - \\
&- 2 X(1, 0, 2G) - G X(2, 0, 2G)] + 2 K_2 K_3 [G b_f + G^2 \frac{b_f^2}{2}] + \\
&+ 2 K_2 K_4 G^2 \frac{b_f^3}{3} - \frac{K_3^2}{2} G [e^{-2Gb_f} - 1] -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - K_3 K_4 [e^{-2Gb_f} G X (1, b_f, -2G) - e^{-2Gb_f} - \\
& - G X (1, 0, -2G) + 1] - K_4^2 [-e^{-2Gb_f} X (1, b_f, -1G) + \\
& + \frac{G}{2} e^{-2Gb_f} X (2, b_f, -2G) + X (1, 0, -2G) - \\
& - \frac{G}{2} X (2, 0, -2G)]
\end{aligned}
\tag{B.21}$$

Placas 2 e 3

Utilizar a expressão da placa 1 com as substituições
(B.20)

$$- \text{expressão} \int_0^{b_i} F_{2i}^2 dy_i$$

Placa 1

$$\begin{aligned}
\int_0^{b_f} F_{21}^2 dy_1 = & \sum_{i=1}^{11,2} \sum_{j=1}^{11,2} C_i C_j \frac{y^{i+j-1}}{(i+j-1)} + 2 \sum_{i=1}^{11,2} C_i \left\{ \frac{K_1}{G} [e^{Gb_f} X(i-1, b_f, G) - \right. \\
& - X(i-1, 0, G)] + \frac{K_2}{G} [e^{Gb_f} X(i, b_f, G) - X(i, 0, G)] - \\
& - \frac{K_3}{G} [e^{-Gb_f} X(i-1, b_f, -G) - X(i-1, 0, -G)] - \\
& - \frac{K_4}{G} [e^{-Gb_f} X(i, b_f, -G) - X(i, 0, -G)] \} + \\
& - \frac{K_1^2}{2G} [e^{2Gb_f} - 1] + \frac{K_1 K_2}{G} [e^{2Gb_f} X(1, b_f, 2G) - \\
& - X(1, 0, 2G)] + 2 K_1 K_3 b_f + 2 K_1 K_4 \frac{b_f^2}{2} + \\
& + \frac{K_2^2}{2G} [e^{2Gb_f} X(2, b_f, 2G) - X(2, 0, 2G)] + 2 K_2 K_3 \frac{b_f^2}{2} + \\
& + 2 K_2 K_4 \frac{b_f^3}{3} - \frac{K_3^2}{2G} [e^{-2Gb_f} - 1] - \\
& - \frac{K_3 K_4}{G} [e^{-2Gb_f} X(1, b_f, -2G) - X(1, 0, -2G)] \\
& - \frac{K_4^2}{2G} [e^{-2Gb_f} X(2, b_f, -2G) - X(2, 0, -2G)]
\end{aligned}
\tag{B.22}$$

Placas 2 e 3

Utilizar a expressão da placa 1 com as substituições
(B.20).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] BLEICH, F., "Buckling Strength of Metal Structures", McGraw-Hill, 1952.
- [2] NEUT, A. van der, "The Interaction of Local Buckling and Column Failure of Thin-Walled Compression Members", Proceedings of the Twelfth International Congress of Applied Mechanics, Stanford University, 26-31 August 1968.
- [3] MERRISON INTERIM DESIGN RULES, Appendix I to the Report of the Committee of Inquiry into the Basis of Design and Method of Erection of Steel Box Girder Bridges.
- [4] GRAVES-SMITH, T.R., "The Ultimate Strength of Locally Buckled Columns of Arbitrary Length", Thin Walled Steel Structures: Their Design and Use in Building, Simpósio no University College of Swansea, 11-14 September 1967.
- [5] WALKER, A.C., "Interactive Buckling of Structural Components", Science Progress, Vol. 62, pp. 579-597, 1975.
- [6] DEWOLF, J.T.; PEKOZ, T.; WINTER, G., "Local and Overall

Buckling of Cold-Formed Members", Journal of the Structural Division ASCE, Vol. 100, pp. 2017-2036, October 1974.

- [7] HANCOCK, G., "Interaction Buckling in I-Section Columns", Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 107, pp. 165-179, January 1981.
- [8] RHODES, J.; HARVEY, J.M., "Interaction Behaviour of Plain Channel Columns Under Concentric and Eccentric Loading", Second International Colloquium on the Stability of Steel Structures, Liege, pp. 439-444, 13-15 April 1977.
- [9] LOUGHLAN, J.; RHODES, J., "Interaction Buckling of Lipped Channel Columns", Conference on Stability Problems in Engineering Structures and Components, University College, Cardiff, 12 - 14 September 1978.
- [10] _____, "The Interactive Buckling of Lipped Channel Columns Under Concentric and Eccentric Loading", International Conference on Thin-Walled Structures", University of Strathclyde, 3-6 April 1979.
- [11] MAQUOI, R.; RONDAL, J., "Etude d'une gamme optimale de profils creux carrés et rectangulaires", Annales de l'Institut Technique du Bâtiment et des Travaux Publics, serie Construction Métallique 91, n° 409, novembre 1982.
- [12] DYM, C.; SHAMES, I., "Solid Mechanics. A Variational Approach", McGraw-Hill Kogakusha, 1973.
- [13] WALKER, A.C., "Design and Analysis of Cold-Formed Sections",

International Text book Company Limited, London, 1975.

- [14] LOUGHLAN, J., "Mode Interaction in Lipped Channel Columns Under Concentric or Eccentric Loading", Ph.D. Thesis, University of Strathclyde, Glasgow, December 1979.
- [15] BULSON, P.S.; ALLEN, H.G., "Background to Buckling", McGraw-Hill Book Company, Great Britain, 1980.
- [16] TIMOSHENKO, S.P.; GERE, J., "Theory of Elastic Stability", McGraw-Hill Book Company, 1961.
- [17] PRZEMIENIECKI, J.S., "Finite Element Structural Analysis of Local Instability", AIAA Journal, Vol. II, nº 1, January 1973.
- [18] BATISTA, E.M., "Interação entre flambagem local e global em colunas de seção U", Relatório Interno, Laboratório de Estruturas do PEC/COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 1984.
- [19] THOMPSON, J.M.T.; TULK, J.D.; WALKER, A.C., "An Experimental Study of Imperfection - Sensitivity in the Interactive Buckling of Stiffened Plates", Internal Report, Department of Civil Engineering, University College London.
- [20] THOMPSON, J.M.T.; HUNT, G.W., "A General Theory on Elastic Stability", Wiley, London, 1973.
- [21] HARVEY, J.M., "Studies on the Interaction of Plate Components of Structural Sections Under Selected Load Conditions", Ph.D. Thesis, University of Glasgow, August 1952.

- [22] RHODES, J.; LOUGHLAN, J., "Simple Design Analysis of Lipped Channel Columns", 5th International Specialty Conference on Cold-Formed Structures, St. Louis, 1980.
- [23] HANCOCK, G., "The Behaviour and Design of Cold-Formed Channels in Compression", Journal of the Australian Institute of Steel Construction, Vol. 17, n° 3, 1983.
- [24] AMERICAN IRON AND STEEL INSTITUTE, "Specification for the Design of Cold-Formed Steel Structural Members", AISI, New York, 1968 and 1980.
- [25] CANADIAN STANDARDS ASSOCIATION, "Cold-Formed Steel Structural Members", Standard S136, Ontário, 1974.